Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationst...

Erwin Freundlich,
Albert Einstein

DORDHOFF
H-UITGEVER
ONINGEN

Digitized by Google

Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie

von

Erwin Freundlich

Mit einem Vorwort

von

Albert Einstein

Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage

Berlin
Verlag von Julius Springer
1917

Digitized by Google

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright by Julius Springer in Berlin 1917.

Digitized by Google

QC6
F72
1917

Vorwort.

Herr *Freundlich* hat es im nachfolgenden Aufsatze unternommen, die gedanklichen und empirischen Quellen, aus denen die allgemeine Relativitätstheorie stammt, vor einem weiteren Leserkreise zu beleuchten. Ich habe bei der Lektüre den Eindruck gewonnen, daß es dem Verfasser gelungen ist, die Grundgedanken der Theorie jedem zugänglich zu machen, dem die Denkmethoden der exakten Naturwissenschaft einigermaßen geläufig sind. Die Beziehungen des Problems zur Mathematik, Erkenntnistheorie, Physik und Astronomie sind fesselnd dargelegt, und insbesondere die tiefen Gedanken des seiner Zeit so weit voraneilenden Mathematikers *Riemann* eingehend gewürdigt. Herr *Freundlich* ist nicht nur als Kenner der in Betracht kommenden Wissensgebiete ein berufener Darsteller des Gegenstandes; er ist auch der erste unter den Fachgenossen gewesen, der sich um die Prüfung der Theorie eifrig bemüht hat. Möge sein Schriftchen vielen Freude machen!

A. Einstein.

M248703

Digitized by Google

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

1. Die spezielle Relativitätstheorie als Vorstufe zu der allgemeinen Relativitätstheorie 3

2. Zwei Forderungen prinzipieller Natur bei der mathematischen Formulierung der Naturgesetze 11

3. Zur Erfüllung der beiden Forderungen 13

a) Das Linienelement in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Raumpunkte in der mit beiden Forderungen verträglichen Fassung 15

b) Das Linienelement in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der Raum-Zeitpunkte in der mit beiden Forderungen verträglichen Fassung 21

4. Die prinzipiellen Schwierigkeiten der klassischen Mechanik 27

5. a) Das Grundgesetz der Bewegung und das Äquivalenzprinzip der neuen Theorie 34

b) Rückblick 43

6. Die Prüfung der neuen Theorie durch die Erfahrung 48

Anhang: Erläuternde Anmerkungen und Literaturangaben 55

Digitized by Google

Einleitung.

Ende des Jahres 1915 hat *A. Einstein* eine Theorie der Gravitation auf Grund eines allgemeinen Prinzips der Relativität *aller* Bewegungen zum Abschluß gebracht. Sein Ziel war dabei nicht, ein anschauliches Bild für das Wirken einer Anziehungskraft zwischen den Körpern zu schaffen, sondern vielmehr eine Mechanik der Relativbewegungen der Körper gegeneinander unter dem Einfluß von Trägheit und Schwere. Der Weg zu diesem weit gesteckten Ziel führt allerdings über manches Opfer an althergebrachten Anschauungen, dafür aber zu einem Standpunkt, der seit langem vielen, die sich mit den Grundlagen der theoretischen Physik befaßt haben, als äußerstes Ziel vorgeschwebt hat. Die Art der erforderlichen Opfer ist aber dazu angetan, Zutrauen zu dieser Theorie zu erwecken, denn das seit Jahrhunderten erfolglose Bemühen, die Lehre von der Gravitation befriedigend in die Naturwissenschaften einzuordnen, mußte zu der Erkenntnis führen, daß dies nicht ohne Zugeständnisse an manche festwurzelnde Anschauung möglich sein würde. In der Tat geht *Einstein* bis auf die Grundpfeiler der Mechanik zurück, um dort seine Theorie zu verankern, und begnügt sich nicht mit einer lediglich formalen Umformung des *Newton*schen Gesetzes, um den Anschluß an neuere Anschauungen zu gewinnen.

Digitized by Google

Um zum Verständnis der *Einstein*schen Ideen vorzudringen, muß man die prinzipiellen Gesichtspunkte, die ihn geleitet haben, mit dem Standpunkt der klassischen Mechanik denselben Fragen gegenüber vergleichen. Man erkennt dann, wie von dem „speziellen" Relativitätsprinzip[1]) eine logische Entwicklung zu der neuen allgemeinen Fassung und zugleich zu einer Theorie der Gravitation hinführt.

Digitized by Google

I.

Die spezielle Relativitätstheorie als Vorstufe zu der allgemeinen Relativitätstheorie.

Im folgenden werden die Ergebnisse des speziellen Relativitätsprinzips des öfteren benutzt werden. Ich schicke deswegen, um nicht später den Gang der Darstellung unterbrechen zu müssen, einen Abschnitt über die Bedeutung des speziellen Relativitätsprinzips als Vorstufe zum allgemeinen voraus. Die prinzipiellen Schwierigkeiten der klassischen Mechanik sollen in einem späteren Abschnitt gesondert behandelt werden; sie werden deshalb hier nur so weit besprochen, wie es unbedingt erforderlich ist.

Die ganze Umwälzung, deren Zeugen wir sind, ist durch Schwierigkeiten eingeleitet worden, auf die man bei der Entwicklung der Elektrodynamik stieß. Von diesen ausgehend kann man daher am besten verfolgen, wie eine Reihe von neuen Erkenntnissen, zu denen uns die Elektrodynamik verhalf, uns schließlich zu einer ganz neuen Stellungnahme den Grundlagen der Mechanik gegenüber führen mußte. Die meisten Einwände gegen die neue Entwicklung sind freilich gerade deswegen erhoben worden, weil eine Disziplin, die man in Fragen der Mechanik nicht für stimmberechtigt erachtete, einen so tiefgehenden Einfluß auf deren Grundlagen beanspruchte. Geht man jedoch diesen Einwänden

Digitized by Google

nach, so erkennt man, daß sie dem Wunsche entspringen, die Mechanik zu einer rein *mathematischen* Disziplin ähnlich der Geometrie zu gestalten, unerachtet der Tatsache, daß ihre Grundlagen rein *physikalische* Hypothesen enthalten; allerdings hatte man bisher diese Hypothesen nicht als solche erkannt.

Die Entwicklung der Elektrodynamik verlief im wesentlichen unbeeinflußt durch die Ergebnisse der Mechanik und selbst ohne Einfluß auf diese, solange ihre Fragestellungen sich auf die elektrodynamischen Erscheinungen *ruhender* Körper beschränkten. Erst als in den *Maxwell*schen Gleichungen eine Grundlage für diese geschaffen war, konnte man daran denken, die elektrodynamischen Erscheinungen *bewegter* Medien zu studieren. Hierbei erhoben sich sofort zahlreiche schwerwiegende Fragen. Alle optischen Vorgänge — nach der *Maxwell*schen Theorie gehören ja auch diese zu den elektrodynamischen — spielen sich entweder zwischen Körpern ab, die relativ zueinander in Bewegung sind, wie in der Astrophysik, oder auf der Erde, die mit fast 30 km Geschwindigkeit in der Sekunde um die Sonne kreist und mit dieser zusammen eine translatorische Bewegung von ungefähr dem gleichen Betrage durch das Fixsternsystem ausführt. Demgemäß mußte vor allem der Einfluß der Bewegung einer Lichtquelle auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit des von ihr ausgehenden Lichtes ermittelt werden. Man suchte also eine Theorie solcher Erscheinungen, in denen elektrodynamische und mechanische Wirkungen vereint auftreten. Die seit langem sorgfältig ausgebaute Mechanik hatte die Probe zu bestehen, ob sie zur richtigen Beschreibung solcher Vorgänge die Werkzeuge zu liefern imstande war.

Neben diesen optischen Problemen lehrte aber auch die Entdeckung der Elektronen neue Tatsachen kennen, in

Digitized by Google

denen sich elektrodynamische und mechanische Erscheinungen vereint abspielen. In den Kathodenstrahlen und an den Radiumpräparaten verfolgen wir die Bewegungsvorgänge der Elementarteilchen der Elektrizität *frei von der Wirkung der Massenanziehung*. Wir haben hier gewissermaßen ein Gegenstück zu den fundamentalen Beobachtungen, auf denen sich die Mechanik aufbaut, nämlich zu den Bewegungsvorgängen der Gestirne: diese verlaufen unbeeinflußt von allen sonstigen physikalischen Wirkungen *einzig und allein unter dem Einflusse der Massenanziehung*. Auch hier wurde die klassische Mechanik einer Belastungsprobe unterworfen.

Den ersten und nächstliegenden Versuch zur Beschreibung dieser Erscheinungen machte *Heinrich Hertz*. Er erweiterte die *Maxwell*schen Gleichungen durch Zusatzglieder, die den Einfluß der Bewegung elektrischer Ladungen wiedergeben sollten und forderte auch für die erweiterten Gleichungen die Geltung des *Galilei-Newtonschen Relativitätsprinzips*. Dieses Prinzip behauptet, daß zwei gleichförmig und geradlinig gegeneinander bewegte Systeme als mechanisch gleichwertig zu gelten haben, und kleidet seine Forderung in ein System von Koordinatentransformationen, bei denen die Gleichungen der Mechanik unverändert bleiben sollen. Für zwei in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit v gleichförmig und geradlinig gegeneinander bewegte Systeme lauten diese Transformationen bekanntlich:

$$x' = x - v\,t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Die Erfahrung hat gelehrt, daß dieser Ansatz von *H. Hertz* ***nicht*** im Einklang mit den Beobachtungen steht. Das Studium der elektrodynamischen Vorgänge bei bewegten Körpern führte vielmehr schließlich auf ein System von Grund-

gleichungen, das gegenüber den sogenannten *Lorentz-Einstein*schen Transformationen

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

invariant bleibt. Daraus folgt: Das Relativitätsprinzip der Mechanik gilt jedenfalls nicht in der Fassung der *Galilei-Newton*schen Transformationen für die Elektrodynamik. Für uns gibt es aber nur folgende Alternative: *Entweder* das *Galilei-Newton*sche Relativitätsprinzip beansprucht unbedingte Gültigkeit für die Mechanik, dann muß es möglich sein, durch optische Experimente auf der Erde die Bewegung derselben festzustellen — wogegen alle bisherigen Versuche sprechen — *oder* aber — und darauf weisen insbesondere die Experimente von *Michelson* und *Morley* unzweideutig hin — es ist in *keiner* Weise möglich, auf der Erde deren translatorische Bewegung nachzuweisen. Dann müssen zwei geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegte Systeme durch *andere Transformationen* aufeinander bezogen werden als durch die *Galilei-Newton*schen der klassischen Mechanik, nämlich durch die *Lorentz-Einstein*schen Transformationen. Der *mechanische Inhalt* des Relativitätsprinzips der klassischen Mechanik erfährt hierdurch *keine* Änderung; denn nach wie vor sollen gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegte Systeme als gleichwertig zur Beschreibung der Naturvorgänge gelten. Verschieden ist nur die das Relativitätsprinzip repräsentierende Gruppe von *mathematischen* Transformationen solcher Systeme ineinander.

Bei dieser Sachlage drängt sich die Frage auf: Was für physikalische Annahmen stecken in den Transformationen des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips und inwiefern stehen sie mit der Erfahrung im Widerspruch, so daß man gezwungen sein kann, sie aufzugeben?

Die *Galilei-Newton*schen Transformationen enthalten die (bisher als solche nicht erkannte) Hypothese, daß es keine endliche Geschwindigkeit gibt, die den Charakter einer universellen Naturkonstante besitzen kann. Man nahm also bisher stillschweigend folgendes an: Mißt in einem System S ein Beobachter die Geschwindigkeit v für die Ausbreitung einer bestimmten Wirkung, so mißt ein Beobachter in einem zweiten System S', das sich relativ zu S bewegt, in seinem System eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit für dieselbe Wirkung; und zwar gilt dies für jede endliche Geschwindigkeit v. Diese Annahme findet sich nun aber für die Vakuumlichtgeschwindigkeit nach den bisherigen Erfahrungen nicht bestätigt. Vielmehr spielt sie allem Anschein nach tatsächlich in der Natur die Rolle einer universellen Konstante; jeder Beobachter mißt unabhängig von seinem Bewegungszustande für die Lichtgeschwindigkeit den gleichen Betrag.

Berücksichtigt man diese Erfahrungstatsache und *verknüpft* man sie mit der Forderung, daß gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegte Systeme für die Beschreibung aller Naturvorgänge gleichwertig sein sollen, so erhält man das von *Einstein* postulierte „spezielle" Relativitätsprinzip, repräsentiert durch die Gruppe der *Lorentz-Einstein*schen Transformationen*). Es hat zu der überraschenden Erkenntnis

*) In dem Abschnitte 3b Seite 25 wird der innere Zusammenhang der Galilei-Newtonschen mit den Lorentz-Einsteinschen Transformationen noch einmal näher beleuchtet werden.

geführt, daß zwischen den Zeitmessungen und den Koordinatenmessungen im Raum prinzipiell kein Unterschied besteht; so daß vom mathematischen Standpunkt gesehen, die Zeitmessung als vierte Koordinatenmessung neben die drei Dimensionen des Raumes tritt.

In der Neugestaltung der Transformationen erschöpft sich jedoch keineswegs die ganze Einwirkung des speziellen Relativitätsprinzips auf die klassische Mechanik. Fast noch einschneidender ist der durch das Relativitätsprinzip hervorgerufene Wandel im Massenbegriff. Die Erfahrungstatsachen, die dafür maßgebend wurden, sind die Bewegungserscheinungen der Elektronen. — Obwohl man gezwungen ist, anzunehmen, daß diese keine materiellen Träger haben, sondern daß sie frei bewegliche Energieteilchen sind, so offenbaren sie dennoch bei Bewegungs*änderungen* alle Eigenschaften bewegter träger Materie. Allerdings verhält sich ihre Trägheit nicht wie diejenige der Materie, nämlich nicht wie eine dem Elektron zukommende *absolute* Größe, sondern nur wie eine relativ zu dem jeweiligen Bezugssystem definierte. In dem anfänglich daraus abstrahierten Begriff der (scheinbaren) *elektromagnetischen* Masse der Elektronen lehrte aber die spezielle Relativitätstheorie nur einen Sonderfall der *jeglicher Energie* zukommenden *Trägheit* zu erkennen. Auch ein von masselosen spiegelnden Wänden eingeschlossener Hohlraum, der von *Strahlung* (Hohlraumstrahlung) erfüllt ist, wird auf Grund der *Maxwell*schen Theorie, wenn in Bewegung gesetzt, die Eigenschaften einer trägen Masse offenbaren, und zwar wegen der Trägheit der von den Wänden eingeschlossenen Strahlungsenergie. Daß sich meßbare Abweichungen von den durch die klassische Mechanik geforderten Gesetzmäßigkeiten erst in diesen Trägheitserscheinungen äußern, rührt in erster Linie daher, daß erst bei den

Elektronenbewegungen Geschwindigkeiten auftreten, die von der Lichtgeschwindigkeit nicht sehr verschieden sind. Alle Gesetze der Mechanik sind jedoch bisher nur an Bewegungsvorgängen erprobt worden, im Vergleich mit denen die Lichtgeschwindigkeit praktisch die Rolle der unendlich großen Geschwindigkeit spielen konnte. Die *Lorentz-Einstein*schen Transformationen zeigen jedoch, daß sich erst in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit die Bewegungsvorgänge ganz und gar anders abspielen als nach den Gesetzen der klassischen Mechanik.

Die Erkenntnis der Relativität der Trägheit der Energie schuf für die Mechanik ganz neue Voraussetzungen. Die klassische Mechanik faßt die träge Masse eines Körpers als eine ihm zukommende absolute, unzerstörbare Größe auf. Die spezielle Relativitätstheorie sagt zwar über die träge Masse der *Materie* noch nichts aus, aber jegliche Materie enthält einen, wahrscheinlich enorm großen, Betrag an latenter Energie. Ihre Trägheit setzt sich also jedenfalls aus zwei Komponenten zusammen: der Trägheit der Materie und der Trägheit dieser Energiemenge. Diese letzte ist eine *relative* Größe, folglich ist auch die von uns beobachtete und gemessene Summe beider keine absolute Größe. Möglicherweise beruht überhaupt alle Trägheit der Materie nur auf der Trägheit der in ihr latenten Energie; dann gilt alles, was wir jetzt von der Relativität der Trägheit der Energie wissen, restlos für die Trägheit der *Materie*.

Die klassische Mechanik baut sich jedoch auf dem absoluten Massenbegriff auf. Mit der Erkenntnis der Relativität der Trägheit wurde eine Einordnung dieser neuen Erscheinungen in die Mechanik ein unbedingtes Erfordernis. *Die spezielle Relativitätstheorie, in ihrer Beschränkung auf Systeme, die durch die Lorentz-Einsteinschen Transforma-*

tionen aufeinander bezogen werden (die also geradlinig gleichförmig gegeneinander bewegt sind), verfügt aber nicht über die Mittel, um diese Arbeit vollauf befriedigend zu leisten. Die Berechtigung zu dieser Behauptung wird man an folgendem Beispiele begreifen: Eine der fundamentalen Erfahrungstatsachen der Mechanik ist z. B. die Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper. Unter der Voraussetzung ihres Bestehens messen wir die Masse eines Körpers durch Messung seines Gewichtes. Das *Gewicht* eines Körpers ist jedoch nur *in bezug auf ein Gravitationsfeld* definiert, in unserem Falle in bezug auf das der Erde. Die *träge Masse* des Körpers wird aber als Attribut der Materie *ohne Bezugnahme auf physikalische Zustände außerhalb des Körpers* eingeführt. Wie kommt dann aber die rätselhafte Übereinstimmung in den Beträgen für die träge und die schwere Masse der Körper zustande? Diese Frage kann auch die spezielle Relativitätstheorie nicht beantworten; hierzu bedarf es einer Theorie der Schwereerscheinungen, einer Gravitationstheorie. Noch mehr: In ihr bleibt nicht einmal die Erfahrungstatsache der Gleichheit von träger und schwerer Masse, die zu den sichersten Erfahrungstatsachen der ganzen Naturwissenschaft gehört, gewahrt. Denn die spezielle Relativitätstheorie liefert zwar eine Trägheit, aber keine Schwere der Energie. Infolgedessen gewinnt ein Körper durch Energieaufnahme zwar an träger, jedoch nicht an schwerer Masse, und das Prinzip der Gleichheit von träger und schwerer Masse wird verletzt. Darum kann die spezielle Relativitätstheorie auch nur als eine *Vorstufe* zu einer allgemeineren aufgefaßt werden, die uns eine befriedigende Stellungnahme gegenüber allen diesen verschiedenen Erfahrungstatsachen ermöglicht.

Hier setzen *Einsteins* Untersuchungen zu einer allgemei-

Digitized by Google

nen Relativitätstheorie ein. Er hat erkannt, daß durch eine Ausdehnung des Relativitätsprinzips auf beschleunigte Bewegungen und durch die Einführung der Gravitationserscheinungen in die Grundprinzipien der Mechanik eine neue Grundlegung der Mechanik möglich wird, bei der sich alle prinzipiellen Schwierigkeiten, die sich bis dahin erhoben hatten, lösen. Seine Theorie stellt zwar eine konsequente Weiterführung der in der speziellen Relativitätstheorie gewonnenen Erkenntnisse dar. Sie wurzelt aber so tief in den erkenntnistheoretischen Grundlagen aller Naturbeschreibung, daß ein Verständnis der neuen Theorie nur möglich ist, wenn ihre Stellungnahme gegenüber diesen Grundlagen klar erfaßt wird. Darum beginne ich die Darstellung mit zwei allgemeinen Forderungen, denen jedes Naturgesetz genügen sollte, die jedoch beide von der klassischen Mechanik keineswegs erfüllt worden sind, während ihre strenge Erfüllung der neuen Theorie das besondere Gepräge verleiht.

2.

Zwei Forderungen prinzipieller Natur bei der mathematischen Formulierung der Naturgesetze.

Newton hatte das einfache und fruchtbare Gesetz aufgestellt, daß zwei Körper, auch wenn sie, wie z. B. die Gestirne, nicht sichtbar miteinander verbunden sind, aufeinander einwirken und einander mit einer Kraft anziehen, die proportional ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres gegenseitigen Abstandes ist. Aber *Huygens* und *Leibniz* lehnten dieses Gesetz ab, weil es einer Grundforderung, die man an jedes physikalische Gesetz stellen müsse, nicht entspräche: der Forderung der *Kon-*

tinuität (Stetigkeit der Kraftübertragung, Nahewirkung). Wie sollten zwei Körper aufeinander wirken ohne ein die Wirkung übertragendes Medium? In der Tat war das Bedürfnis nach einer befriedigenden Antwort auf diese Frage so groß, daß man, um ihm zu genügen, schließlich die Existenz eines das ganze Universum erfüllenden und alles durchdringenden Stoffes, des Weltäthers, annahm, obwohl dieser Stoff zu ewiger Unsichtbarkeit und Unfühlbarkeit, also zur Unbeobachtbarkeit, verdammt schien, und man ihm auch sonst allerlei einander widersprechende Eigenschaften zuschreiben mußte. Mit der Zeit erhob man aber im Gegensatz zu solchen Annahmen immer entschiedener die Forderung, *daß bei der Formulierung der Naturgesetze nur solche Dinge miteinander zu verknüpfen seien, die tatsächlich der Beobachtung unterliegen*, eine Forderung, die unzweifelhaft der gleichen Quelle des Erkenntnistriebes entspringt wie diejenige der Stetigkeit, und die dem Kausalitätsprinzip erst den wahren Charakter eines Gesetzes für die *Erfahrungswelt* verleiht.

In der Verknüpfung und konsequenten Erfüllung dieser zwei Forderungen liegt, glaube ich, ein Kernpunkt der *Einstein*schen Forschungsart; sie verleiht seinen Ergebnissen die tief greifende Bedeutung für die Gestaltung des physikalischen Weltbildes. In dieser Hinsicht werden seine Bestrebungen auch wohl bei den Naturforschern nirgends auf prinzipiellen Widerspruch stoßen, denn beide Forderungen: *die der Kontinuität und die der kausalen Verknüpfung von lediglich beobachtbaren Dingen in den Naturgesetzen*, sind *naturgemäß;* es könnte höchstens bezweifelt werden, ob es *zweckmäßig* ist, auf solche fruchtbare Hilfsvorstellungen wie die „Fernkräfte" zu verzichten.

Das Prinzip der Kontinuität verlangt, daß sich alle Na-

Digitized by Google

turgesetze als Differentialgesetze formulieren lassen. Man muß also allen Naturgesetzen eine solche Fassung geben können, daß sie den physikalischen Zustand an irgendeinem Orte durch denjenigen der unmittelbaren Nachbarschaft vollständig bestimmen. Infolgedessen dürfen in ihnen nicht die Abstände *endlich* entfernter Punkte, sondern nur solche unendlich nah benachbarter Punkte auftreten. Das oben angegebene *Newton*sche Attraktionsgesetz verstößt als Fernwirkungsgesetz gegen diese erste Forderung.

Die zweite Forderung, die der strengeren Fassung der Kausalität in den Naturgesetzen, enthält das *Prinzip der Relativität aller Bewegungen* als einen speziellen Fall. Sie bedeutet eine Anwendung desselben auf die Grundanschauungen der Mechanik. In der Tat *beobachten* wir nur die Bewegungen von Körpern *relativ* zueinander, die klassische Mechanik arbeitet jedoch seit *Newton* mit dem Begriff der *absoluten* Bewegung eines Körpers. Erst *Einstein* ist es gelungen, sie von solchen unnatürlichen Vorstellungen ganz zu befreien.

Die unbedingte Durchführung des Prinzips der Kontinuität und des Prinzips der Relativität in seiner allgemeinsten Fassung greift tief in die Frage der mathematischen Formulierung der Naturgesetze ein. Deshalb ist es erforderlich, eine Betrachtung prinzipieller Natur über diese Frage hier anzustellen.

3.
Zur Erfüllung der beiden Forderungen.

Die mathematische Einkleidung eines Naturgesetzes geschieht durch die Aufstellung einer Formel. Sie umfaßt und ersetzt durch eine Gleichung das Ergebnis sämtlicher Messungen, die den Ablauf eines Vorganges zahlenmäßig wieder-

Digitized by Google

geben würden. Solche Formeln wenden wir nicht nur dann an, wenn wir die Mittel in der Hand haben, das Ergebnis der Rechnungen durch tatsächliche Messungen zu kontrollieren, sondern auch dann, wenn die Messungen gar nicht ausführbar *sind*, sondern nur ausführbar *gedacht* werden. So z. B., wenn man von dem Abstande des Mondes von der Erde spricht und ihn in Metern ausdrückt, wie wenn es wirklich möglich wäre, ihn durch fortgesetztes Anlegen eines Metermaßes auszumessen.

Mit diesem Hilfsmittel der Analysis haben wir den Bereich exakter Forschung weit über den uns tatsächlich zugänglichen Meßbereich ausgedehnt, und zwar sowohl nach der Grenze des Unmeßbar-Großen wie auch der des Unmeßbar-Kleinen hin. Wir haben uns damit zugleich eine symbolische Darstellung geschaffen, die (frei von zufälligen und ausgesprochen anthropomorphen Fesseln) die Vorgänge in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenartigen Messungen, wie z. B. den Raum- und den Zeitmessungen, wiedergibt. Die Schaffung mathematischer Ausdrücke, die man als Symbole für bestimmte physikalische, der Messung unterliegende Größen, wie z. B. *Länge* eines Stabes, *Volumen* eines Würfels usw., einsetzen kann, — um dann der Analysis gleichsam alle Verantwortung für die Folgerungen zu überlassen —, ist nun ein Grundproblem der theoretischen Physik und steht in *engster Beziehung zu den beiden Forderungen*, von denen wir zu Anfang sprachen. Um das einzusehen, muß man auf die Grundlagen der Geometrie zurückgehen und sie von den Gesichtspunkten aus analysieren, wie das *Helmholtz* in verschiedenen Aufsätzen getan hat und *Riemann* in seiner Habilitationsschrift (1854) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen". *Riemann* weist fast prophetisch auf die Wege hin, die *Einstein* jetzt beschritten hat.

Digitized by Google

a) Das Linienelement in der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit der Raumpunkte in der mit beiden Forderungen verträglichen Fassung.

Jeder Punkt im Raume ist durch drei Zahlen x_1, x_2, x_3, die wir z. B. als die Maßzahlen eines rechtwinkligen Koordinatensystems auffassen können, eindeutig unter allen übrigen Punkten ausgezeichnet und dadurch auffindbar; indem wir diese drei Zahlen kontinuierlich verändern, können wir jeden einzelnen Raumpunkt eindeutig festlegen. Das System der Raumpunkte stellt, wie *Riemann* es ausdrückt, eine „mehrfach ausgedehnte Größe" (Mannigfaltigkeit) dar, zwischen deren einzelnen Elementen (Punkten) ein *kontinuierlicher* Übergang möglich ist. Wir kennen noch andere *kontinuierliche* Mannigfaltigkeiten, z. B. das System der Farben, das System der Töne u. a. m. Ihnen allen ist gemein, daß die Festlegung eines Elementes innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit (eines *bestimmten* Punktes, einer *bestimmten* Farbe, eines *bestimmten* Tones) eine charakteristische Zahl von Größenbestimmungen erfordert; diese Zahl nennt man die *Dimension* der betreffenden Mannigfaltigkeit. Sie beträgt für den Raum „drei", für die Fläche „zwei", für die Linie „eins". Das System der Farben ist z. B. eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit der Dimension „drei", entsprechend der Dreizahl der „Grundfarben" Rot, Grün, Violett, durch deren Zusammenmischung *jede* Farbe herstellbar ist.

Mit der Annahme der Stetigkeit des Überganges von einem Element zu einem anderen innerhalb einer Mannigfaltigkeit und mit der Festlegung ihrer Dimension ist aber noch nichts ausgesagt über die Möglichkeit, abgegrenzte Teile dieser Mannigfaltigkeit miteinander zu vergleichen, z. B. über die Möglichkeit, zwei einzelne Töne miteinander zu vergleichen, oder

die Möglichkeit, zwei einzelne Farben miteinander zu vergleichen; d. h. es ist noch nichts über die Maßverhältnisse der Mannigfaltigkeit ausgesagt, etwa über die Art der Maßstäbe, mit denen man innerhalb der Mannigfaltigkeit Messungen vornehmen kann. Vielmehr muß uns hierfür erst die Erfahrung Tatsachen kennen lehren, damit wir für die uns jeweilig beschäftigende Mannigfaltigkeit (Raumpunkte, Farben, Töne), die unter den verschiedenartigen physikalischen Zuständen gültigen Maßgesetze aufstellen können; diese Maßgesetze werden je nachdem, welche Erfahrungstatsachen wir dazu heranziehen, verschieden ausfallen können[2]).

Für die Mannigfaltigkeit der Raumpunkte hat uns die Erfahrung die Tatsache kennen gelehrt, daß *endliche starre* Punktsysteme im Raume frei bewegt werden können ohne ihre Form und ihre Dimensionen zu verändern; und der aus dieser Tatsache abgeleitete Begriff der „Kongruenz" ist das befruchtende Moment für eine Maßbestimmung geworden[3]). Sie stellt uns vor die Aufgabe, aus den Zahlen x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3, welche zwei bestimmte Punkte im Raum bezeichnen, einen mathematischen Ausdruck zu bilden, der als Maß für ihren gegenseitigen starren Abstand angesehen und als solcher in die Formeln für die Naturgesetze eingeführt werden kann.

Die Gleichungen für die Naturgesetze, die — um die Forderungen der „Kontinuität" zu erfüllen — Differentialgesetze sein müssen, enthalten nur die Abstände ds unendlich nah benachbarter Punkte, sogenannte *Linienelemente*. Wir müssen darum fragen, ob unsere beiden Forderungen auf den analytischen Ausdruck für das *Linienelement* ds von Einfluß sind, und, falls ja, welcher Ausdruck mit beiden verträglich ist. *Riemann* verlangt von einem Linienelement vorerst nur, daß es seiner *Länge* nach unabhängig von Ort und Richtung

Digitized by Google

mit jedem anderen *verglichen* werden kann. Dies ist ein charakteristisches Merkmal der Maßverhältnisse im Raum; in der Mannigfaltigkeit der Töne und in der Mannigfaltigkeit der Farben existiert z. B. dieses Merkmal nicht (s. Anmerkung 2). *Riemann* formuliert diese Bedingung mit den Worten, „daß die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen und jede Linie durch eine andere meßbar sein soll". Alsdann findet er: Bezeichnen x_1, x_2, x_3 bzw. $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ zwei unendlich nahe Raumpunkte, und die kontinuierlich veränderlichen Zahlen x_1, x_2, x_3 *irgendwelche* Koordinaten (nicht etwa speziell geradlinige), so hat die Quadratwurzel aus einer ständig positiven, ganzen, homogenen Funktion zweiten Grades der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 alle Eigenschaften[4]), die das Linienelement aufweisen muß. Man wird also in dem Ausdruck:

$$ds = \sqrt{g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots + g_{33}\,dx_3^2}$$

in welchem die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ stetige Funktionen der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sind, einen Ausdruck für das Linienelement im Punkte x_1, x_2, x_3 besitzen.

Darüber, was für Koordinaten die drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sein sollen, ob rechtwinklige, Cartesische, Polarkoordinaten oder krummlinige (*Gauss*sche) Koordinaten (s. S. 41), also über die Art der Ausmessung des Raumes, ist in diesem Ausdruck gar keine Voraussetzung getroffen. Fordert man jedoch speziell, daß jeder Punkt durch rechtwinklige Cartesische Koordinaten x, y, z festgelegt werden kann, so nimmt das Linienelement in diesen speziellen Veränderlichen die Gestalt

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

an. Dieser Ausdruck ist bisher stets für die Länge des Linienelementes in alle physikalischen Gesetze eingeführt

worden, da er für alle Raummessungen die Anwendung der euklidischen Geometrie zuläßt. Diese besondere Annahme über die Art der Ausmessung des Raumes enthält aber, wie *Helmholtz* eingehend diskutiert hat, die Hypothese, daß *endliche* starre Punktsysteme, also *endliche* starre Abstände, im Raume frei beweglich sind und mit anderen (kongruenten) Punktsystemen zur Deckung gebracht werden können. Im Hinblick auf die Forderung der *Kontinuität* erscheint diese Hypothese insofern inkonsequent, als sie implizite Aussagen über *endliche* Abstände in reine Differentialgesetze, in denen nur *Linienelemente* auftreten, einführt; aber sie *widerspricht* ihr nicht.

Anders stellt sich die Forderung der Relativität aller Bewegungen zu der Möglichkeit, dem Linienelement die spezielle euklidische Gestalt zu erteilen*).

Nach dem Prinzip der Relativität aller Bewegungen müssen alle Systeme, die durch Relativbewegungen der Körper gegeneinander zustande kommen, als völlig gleichberechtigt gelten können. Die Naturgesetze müssen also beim Übergange von einem solchen System zu einem anderen ihre Gestalt bewahren; d. h. die diesen Übergang bewerkstelligenden Transformationen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 in andere dürfen den analytischen Ausdruck für das betrachtete Naturgesetz nicht verändern.

*) Strenggenommen müßte ich hier schon vorwegnehmen, daß die obigen Überlegungen in durchsichtiger Weise verallgemeinert eigentlich auch für die vierdimensionale *Raum-Zeit*-Mannigfaltigkeit gelten, in der sich ja in Wahrheit alle Vorgänge abspielen, und die Transformationen sich auf die vier Veränderlichen derselben beziehen. Bei diesen allgemein gehaltenen Überlegungen hat jedoch die Vernachlässigung der vierten Dimension nichts zu besagen. Eine Begründung dieses Umstandes folgt Abschnitt 3b.

Digitized by Google

Da wir vorerst mit allen möglichen Relativbewegungen der Körper gegeneinander rechnen müssen, so verlangt das *allgemeine* Prinzip der Relativität, daß die Naturgesetze, und damit auch das in ihnen auftretende Linienelement, bei *beliebiger* Transformation der Veränderlichen ihre Gestalt bewahren. Dieser Forderung wird nun in der Tat das Linienelement

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}\,x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + \ldots + g_{33}\,\mathrm{d}\,x_3^2}$$

gerecht, in dem über die Art der Ausmessung des Raumes, d. h. darüber, was für Koordinaten die Veränderlichen x_1, x_2, x_3 bedeuten sollen, keinerlei beschränkender Vorbehalt gemacht ist. Das euklidische Linienelement

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2 + \mathrm{d}\,z^2}$$

bewahrt seine Gestalt dagegen *nur* bei den Transformationen der *speziellen* Relativitätstheorie (s. Anmerkung 1), die sich auf *gleichförmig* geradlinig bewegte Systeme beschränkt. Die Erfahrung lehrt uns jedoch täglich, daß sich die Körper *infolge ihrer Gravitationswirkung* ständig *beschleunigt* gegeneinander bewegen. Infolgedessen ist die Forderung der Relativität *aller* Bewegungen mit den Voraussetzungen der euklidischen Maßbestimmung in den Differentialgesetzen der Physik nicht zu vereinen.

Die Wahl des Ausdruckes:

$$\mathrm{d}\,s^2 = \sum_1^3 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu$$

für das Linienelement in den Naturgesetzen ist trotz seiner großen Allgemeinheit dennoch als eine Hypothese aufzufassen, wie schon *Riemann* hervorhebt. Denn auch andere Funktionen der Differentiale $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, z. B. die vierte Wurzel aus einem homogenen Differentialausdruck vierter Ordnung derselben, könnten ein Maß für die Länge des

Linienelementes abgeben[5]). Aber es liegt zur Zeit kein Anlaß vor, den einfachsten allgemeinen Ausdruck für das Linienelement, nämlich denjenigen zweiter Ordnung, zu verlassen und kompliziertere Funktionen heranzuziehen. Im Rahmen der beiden Forderungen, welche wir den Beschreibungen der Naturvorgänge auferlegen, erfüllt derselbe alle Anforderungen. Immerhin darf man nie vergessen, daß in der Wahl des analytischen Ausdruckes für das Linienelement stets Hypothetisches enthalten ist, und daß es Pflicht des Physikers ist, dieser Tatsache jederzeit vorurteilslos bewußt zu sein. *Riemann* beschließt darum auch seine Schrift mit folgenden, jetzt besonders bedeutsam wirkenden, Sätzen:

„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten[6]) Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu *Newton* den Grund gelegt, ausgeht und diese, durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur

dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft: in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt."

Also: Nach *Riemanns* Auffassung werden diese Fragen entschieden, wenn man von der *Newton*schen Auffassung der Erscheinungen ausgeht und sie durch Tatsachen, die sich bisher aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet. Das ist es, was *Einstein* getan hat. Die „bindenden Kräfte", auf die *Riemann* hinweist, werden wir in der Tat in der *Einstein*schen Theorie wiederfinden. Wie wir im fünften Abschnitte sehen werden, fußt nämlich die *Einstein*sche Theorie der Gravitation in der Auffassung, daß die Gravitationskräfte die „bindenden Kräfte", also den „inneren Grund der Maßverhältnisse", im Raume darstellen.

b) Das Linienelement in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte in der mit beiden Forderungen verträglichen Fassung.

Die Maßverhältnisse, die wir bei der Formulierung der Naturgesetze zugrunde legen sollen, hätte man gleich mit Rücksicht auf die vierdimensionale Mannigfaltigkeit der Raum-Zeit-Punkte behandeln können, da nach der „speziellen" Relativitätstheorie die Zeitmessung genau so in die Naturgesetze eingeht wie die Raummessung. Ich möchte trotzdem die Zeitmessung gesondert behandeln, einmal, weil gerade dieses Ergebnis der Relativitätstheorie bei den Anhängern der klassischen Mechanik den größten Widerstand gefunden hat, dann aber, weil auch die klassische Mechanik

Digitized by Google

Festsetzungen wegen der Zeitmessung treffen muß, aber nie völlige Einigkeit erzielt hat.

Dem Trägheitsgesetz von *Galilei*: Ein äußeren Einflüssen nicht unterworfener Körper bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer geraden Bahn: fehlen zwei wesentliche Bestimmungsstücke, nämlich die Beziehung der Bewegung auf ein bestimmtes Koordinatensystem und ein bestimmtes Zeitmaß; ohne Zeitmaß kann man nicht von einer *gleichförmigen* Geschwindigkeit sprechen.

Nach einem Vorschlage von *C. Neumann* hat man das Trägheitsgesetz selbst zur Definition eines Zeitmaßes herangezogen, und zwar in der Formulierung[7]): „Zwei materielle Punkte, von denen jeder sich selbst überlassen ist, bewegen sich in solcher Weise fort, daß gleichen Wegabschnitten des einen immer gleiche Wegabschnitte des anderen korrespondieren." Auf Grund dieses Prinzips, in welches die Zeitmessung nicht explizite eingeht, können wir „gleiche Zeitintervalle als solche definieren, innerhalb welcher ein sich selbst überlassener Punkt gleiche Wegabschnitte zurücklegt".

Diesen Standpunkt haben auch in späteren Untersuchungen über das Trägheitsgesetz z. B. *L. Lange* und *H. Seeliger* eingenommen. Auch *Maxwell* hat (in „Substanz und Bewegung") diese Definition gewählt. Dagegen hat besonders *H. Streintz*[8]) (im Anschluß an *Poisson* und *d'Alembert*) die Loslösung der Zeitmessung vom Trägheitsgesetz gefordert, da ihre begrifflichen Voraussetzungen eine tiefere und allgemeinere Grundlage als das Trägheitsprinzip hätten. Nach seiner Ansicht kann *jeder* physikalische Vorgang, den man unter identischen Bedingungen wirklich wiederholen kann, zur Festsetzung einer Einheit der Zeitmessung dienen, da jeder *identische* Vorgang gleiche Dauer beanspruchen muß; anderenfalls wäre überhaupt eine gesetzmäßige Beschreibung

der Naturvorgänge ausgeschlossen. In der Tat beruht auf diesem Prinzip die Uhr. Dieses Prinzip führt einen Beobachter *wenigstens für seinen Beobachtungsort* zu einer Zeitmessung; die Zurückführung der Zeitmessung auf das Trägheitsgesetz dagegen führt zwar zu einer einwandfreien *Definition gleicher Zeitlängen*, aber die *Messung* gleicher Wegabschnitte, die ein gleichförmig bewegter Körper zurücklegt, und damit die *Festlegung* einer Zeiteinheit ist physikalisch für irgendeinen Beobachtungsort nur dann möglich, wenn der Beobachter und der Körper dauernd, z. B. durch Lichtsignale, verbunden sind. Man kann jedoch nicht ohne weiteres voraussetzen, daß zwei Beobachter, die relativ zueinander in gleichförmiger Translation begriffen sind, die also nach dem Trägheitsgesetz gleichwertig sind, in bezug auf denselben bewegten Körper auf diese Weise zu identischen Zeitmessungen gelangen werden. — Der *Poisson*sche Gedanke führt also *an einem gegebenen Beobachtungsorte selbst* zu einer befriedigenden Zeitmessung, gewissermaßen zur Konstruktion einer Uhr, berührt aber die Zeitbeziehung *verschiedener* Beobachtungsorte *aufeinander* gar nicht; der *Neumann*sche dagegen führt unmittelbar auf diejenigen Fragen, die seit der Aufstellung des Relativitätsprinzips durch *Einstein* im Mittelpunkte der Diskussion stehen.

Bei dem Streben, die klassische Mechanik auf eine möglichst kleine Zahl von widerspruchsfreien Prinzipien zurückzuführen, nahm man zu *Idealkonstruktionen* und *Gedankenexperimenten* seine Zuflucht. Man kam dabei gar nicht auf die Vermutung, daß die Verwendung eines Lichtsignals als Verbindung zwischen dem sich bewegenden Körper und dem Beobachter, in der Praxis zur Feststellung der *Gleichzeitigkeit* notwendig, das Endresultat, d. h. also die Zeitmessung in verschiedenen Systemen beeinflussen würde. Gerade diese

Vermutung ist aber nach *Einstein* unabweisbar, weil dem Begriffe der *Gleichzeitigkeit*, auf dem jede Zeitmessung beruht, keine absolute Bedeutung zukommt[9]). Infolgedessen sind die in der klassischen Mechanik über die Zeitmessung getroffenen Vereinbarungen nicht hinreichend.

Daß erst nach so vielen Jahren eine so fundamentale Revision der für die Zeitmessung gemachten Annahmen nötig wurde, erklärt sich daraus, daß sogar die in der Astronomie auftretenden Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein sind, daß sich zwischen den Beobachtungen und der Theorie keine auffallenden Mißhelligkeiten einstellen konnten. Infolgedessen traten die Schwächen der Theorie, insbesondere in der Beziehung verschiedener Systeme aufeinander, nicht zutage. Insbesondere wurde man nicht gewahr, daß die Transformationsgleichungen des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips, welche die Koordinatenbeziehung gleichförmig gegeneinander bewegter, also mechanisch gleichwertiger, Systeme zum Ausdruck bringen, und in denen allen speziell die Zeitmessungen als völlig unabhängig voneinander angenommen werden, Hypothesen enthalten. Erst durch die Relativitätstheorie von *Einstein* sind dieselben aufgedeckt worden. Man wird das aus folgendem noch deutlicher ersehen.

Prinzipiell hätte schon lange vor den Erörterungen der elektrodynamischen Erscheinungen die Frage aufgeworfen werden können: Wie sind die Messungen in zwei Koordinatensystemen x, y, z, t und x', y', z', t', die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen, im allgemeinen aufeinander zu beziehen; d. h. wie drücken sich die x, y, z, t durch die x', y', z', t' und die relative Geschwindigkeit q der beiden Systeme aus? — eine Frage, auf welche der *Neumann*sche Vorschlag für die Zeitmessung unmittelbar hinweist. Man

wäre aus ganz allgemeinen Erwägungen, die gewissen Grundanschauungen über Bewegungen entspringen, zu Transformationsgleichungen viel allgemeinerer Art gelangt, als es die des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips sind, in welchen stets $t' = t$ gesetzt wird[10]). In diesen allgemeinen Transformationsgleichungen hätte nun *eine* Größe besondere Beachtung beansprucht. Breitet sich irgendeine Wirkung in einem System mit der Geschwindigkeit v aus, so breitet sie sich in einem relativ zum ersten bewegten zweiten System im allgemeinen mit einer von v verschiedenen Geschwindigkeit $v' \neq v$ aus. Nach *Frank* und *Rothe* gibt es aber immer eine *ausgezeichnete* Geschwindigkeit, die in *jedem* System unabhängig von dessen Bewegung ihren Wert beibehält. Man hatte bisher stillschweigend angenommen, daß nur die unendlich große Geschwindigkeit diese ausgezeichnete Eigenschaft hat. In diesem Fall degenerieren nämlich die allgemeinen Transformationsgleichungen in die *Galilei-Newton*schen (siehe Anmerkung 1). Hätte man aber die Frage offen gelassen, ob es etwa unter den bekannten Bewegungen eine *endliche* Geschwindigkeit gibt, die diese ausgezeichnete Eigenschaft offenbart, dann wäre man sich des Hypothetischen dieser Annahme wenigstens bewußt geblieben und hätte das Ergebnis des *Michelson*schen Versuches, daß die Lichtgeschwindigkeit diese ausgezeichnete Eigenschaft in der Tat offenbart, mit den von *Einstein* daraus gezogenen Folgerungen für die Zeitmessung nicht als einen willkürlichen Eingriff in die Mechanik empfunden.

Die universelle Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit muß als Tatsache hingenommen werden. Sie zeigt, wie eng die Mechanik mit den übrigen Zweigen der Physik verflochten ist. Allerdings harmoniert sie nicht mit den Bestrebungen derjenigen, die die Mechanik zu einer rein mathematischen

Digitized by Google

Disziplin wie die Geometrie entwickeln möchten. Gleichviel: Die bisherigen Annahmen über die der Mechanik zugrunde zu legende Zeiteinheit sind nicht gleichzeitig mit den Transformationsgleichungen des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips und der Tatsache der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit vereinbar. Vielmehr müssen die Gesichtspunkte geltend gemacht werden, die von *Lorentz* und *Einstein* entwickelt worden sind und die Relativität der Zeitmessungen berücksichtigen.

Die Einzelheiten, die aus der Relativität des Zeitbegriffes folgen, sind in den letzten Jahren so viel besprochen worden, daß sich nur oft Gesagtes wiederholen ließe. Wesentlich ist die Erkenntnis, daß die Zeitmessung in die Naturgesetze ganz gleichwertig eingeht, wie die Raummessung in einer Koordinatenrichtung. Raum und Zeit stellen also eine *einheitliche Mannigfaltigkeit* der Dimension „vier" mit *einheitlichen Maßverhältnissen* dar[11]). Infolgedessen hat man konsequenterweise die Überlegungen des vorangehenden Abschnittes über die Maßverhältnisse einer Mannigfaltigkeit auf die vierdimensionale Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit anzuwenden, und hat im Hinblick auf die zwei prinzipiellen Forderungen: der Kontinuität und der Relativität: indem man die Zeitmessung als vierte Dimension einbezieht, für das Linienelement den Ausdruck anzusetzen:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\,\mathrm{d}x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + g_{34}\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4 + g_{44}\,\mathrm{d}x_4^2,$$

in welchem die $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ Funktionen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 sind.

Zu dieser viel allgemeineren Stellungnahme gegenüber den Fragen der Maßgesetze in den physikalischen Formeln hat uns bisher nur das Bedürfnis geleitet, von Anfang an in die Formulierung der Naturgesetze nicht mehr Voraus-

setzungen einzuführen, als mit den beiden Forderungen verträglich sind, und Gesichtspunkten Anerkennung zu verschaffen, zu welchen die *spezielle* Relativitätstheorie hingeführt hat. Zusammenfassend können wir sagen: Die Annahme *euklidischer* Maßverhältnisse ist zwar mit der Forderung der *Kontinuität vereinbar*; ihre besonderen Voraussetzungen erscheinen aber als beschränkende Hypothesen, welche nicht gemacht zu werden brauchten. Aber die zweite Forderung: Zurückführung *aller* Bewegungen auf Relativbewegungen, *zwingt* uns dazu, die euklidische Maßbestimmung aufzugeben (S. 19 unten). Eine Schilderung der in der Mechanik noch bestehenden Schwierigkeiten wird die Notwendigkeit dieses Schrittes verständlich machen.

4.
Die prinzipiellen Schwierigkeiten der klassischen Mechanik.

Die Grundlagen der klassischen Mechanik lassen sich in engem Rahmen nicht erschöpfend darstellen. Ich kann für den hier vorliegenden Zweck nur die Schattenseiten der Theorie deutlich hervortreten lassen, ohne ihren bisherigen Erfolgen gerecht werden zu können. Alle Bedenken gegen die klassische Mechanik beginnen schon bei der Formulierung des Gesetzes, das *Newton* an ihre Spitze stellt, der Formulierung des Trägheitsgesetzes.

Wie schon S. 22 betont wurde, läßt die Aussage, daß ein sich selbst überlassener Punkt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer geraden Linie bewegt, die Beziehung auf ein bestimmtes Koordinatensystem vermissen. Hier erhebt sich eine unüberbrückbare Schwierigkeit: die Natur

Digitized by Google

liefert uns tatsächlich kein Koordinatensystem, in bezug auf welches eine geradlinig gleichförmige Bewegung möglich wäre. Denn sobald wir ein Koordinatensystem mit irgendeinem Körper, z. B. mit der Erde, der Sonne usw., verbinden — und das verleiht ihm erst eine physikalische Bedeutung —, so ist die Voraussetzung des Trägheitsgesetzes (die Freiheit von äußeren Einflüssen) wegen der Gravitationswirkung der Körper aufeinander nicht mehr erfüllt. Man muß demgemäß der Bewegung eines Körpers entweder eine Bedeutung an sich zusprechen, d. h. Bewegungen relativ zum „absoluten" Raum zulassen, oder zu Gedankenexperimenten greifen, indem man, wie *C. Neumann*, einen hypothetischen Körper Alpha einführt und relativ zu diesem ein Achsensystem festlegt; in bezug auf welches dann das Trägheitsgesetz gelten soll (Inertialsystem)[12]). Die Alternative, vor die man so gestellt wird, ist höchst unbefriedigend: Die Einführung des absoluten Raumes gibt zu den oft diskutierten begrifflichen Schwierigkeiten Anlaß und hat nur insofern ihre Berechtigung, als sie uns ermöglicht, die *Newton*sche Mechanik beizubehalten. Und die Einführung des Bezugssystems Alpha trägt zwar der Relativität der Bewegungen so weit Rechnung, daß alle relativ zu einem Alphasystem gleichförmig bewegten weiteren Systeme von Anfang an als *gleichwertig* eingeführt werden; wir können aber bestimmt behaupten, daß es ein sichtbares Alphasystem gar nicht gibt und daß man auch nie zu einer endgültigen Festlegung eines solchen gelangen wird. (Man wird höchstens durch immer weiter geführte Berücksichtigung der Einflüsse der Fixsterne auf das Sonnensystem und aufeinander immer näher an ein Koordinatensystem kommen, das für das Sonnensystem die Rolle eines solchen Inertialsystems *mit genügender Genauigkeit* spielen kann.) Infolgedessen gibt der Urheber dieser Auffassung, *C. Neu-*

Digitized by Google

mann, selbst zu, daß sie stets „Unbefriedigendes" und „Rätselhaftes" behalten werde und die so begründete Mechanik eigentlich eine recht wunderliche Theorie darstelle.

Darum erscheint es durchaus natürlich, wenn *E. Mach*[13]) den Vorschlag macht, das Trägheitsgesetz so zu formulieren, daß unmittelbar die Beziehung auf den Fixsternhimmel zutage tritt. „Statt zu sagen, die Richtung und Geschwindigkeit einer Masse μ im Raume bleibt konstant, kann man auch den Ausdruck gebrauchen, die mittlere Beschleunigung der Masse μ gegen die Massen m, m', m'', ... in den Entfernungen r, r', r'', ... ist gleich Null oder $\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Sigma mr}{\Sigma m} = 0$. Letzterer Ausdruck ist dem ersten äquivalent, sobald man nur hinreichend viele und hinreichend weite und große Massen in Betracht zieht ..." Befriedigen kann aber auch diese Formulierung nicht. Abgesehen von einer gewissen Bestimmtheit fehlt ihr auch der Charakter des Nahewirkungsgesetzes, so daß ihre Erhebung zum Grundgesetz (statt des Trägheitsgesetzes) nicht in Frage kommt.

Die innere Ursache dieser Schwierigheiten ist sicherlich in dem ungenügenden Anschluß der Grundprinzipien an die Beobachtung zu finden. In Wahrheit *beobachten* wir nur die Bewegung von Körpern *relativ* zueinander, und diese ist *niemals* absolut geradlinig und gleichförmig. *Die reine Trägheitsbewegung ist also eine durch Abstraktion aus einem Gedankenexperiment gewonnene Vorstellung — eine Fiktion.*

So fruchtbar und unerläßlich das Gedankenexperiment auch oft sein mag, so droht doch jederzeit die Gefahr, daß zu weit getriebene Abstraktion den naturwissenschaftlichen Inhalt der ihm zugrunde liegenden Begriffe verflüchtigt. Und so ist es hier. Wenn es für unsere Anschauung keinen Sinn hat, von der „Bewegung eines Körpers" im Raum zu

Digitized by Google

sprechen, solange nur *ein* Körper vorhanden ist, hat es dann einen Sinn, dem Körper auch noch Attribute, wie *träge Masse*, zuzusprechen, die nur unserer Beobachtung von *mehreren* Körpern entstammen, die sich *relativ* zueinander bewegen? Wenn nicht, so kann dem Begriffe „träge Masse eines Körpers" auch nur eine *relative* Bedeutung zugesprochen werden. — Solche Zweifel verstärkte die spezielle Relativitätstheorie, als sie zu dem Ergebnis gelangte, daß die Trägheit nichts der Materie Eigentümliches sei, sondern daß auch die Energie Trägheit besitze. Bei ihr kann aber von einem Betrage der trägen Masse schlechthin, wie man es bisher bei der Materie tat, nicht gesprochen werden. Da nämlich die Dichte der Energie[14]), der ihre Trägheit proportional ist, der Größe nach von dem gewählten Bezugssystem abhängt, so kann auch nur von einem Werte derselben *relativ* zu dem betreffenden Bezugssystem gesprochen werden. Zugleich machte sich die Auffassung geltend, daß die gesamte Trägheit der Körper auf deren Energieinhalt, welcher größtenteils latent ist, zurückzuführen sei.

Diese Ergebnisse der Relativitätstheorie brachten unsere ganze Auffassung von der Trägheit der Materie ins Wanken, denn sie raubten dem Satze von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper seine strenge Gültigkeit. Jetzt sollte ein Körper je nach seinem Energieinhalte eine andere *träge* Masse haben, ohne daß sich seine *schwere* Masse verändert hätte. Seit jeher hatte man aber seine Masse aus seinem Gewicht ermittelt, ohne daß sich Unstimmigkeiten offenbart hätten[15]).

Eine solche fundamentale Schwierigkeit konnte zutage treten, weil der Satz von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse mit den Grundprinzipien der Mechanik nicht eng verflochten worden war und den Schwereerscheinungen

Digitized by Google

nicht die gleiche Bedeutung wie den Trägheitserscheinungen in den Grundlagen der Newtonschen Mechanik zuerteilt wird, wie es der Erfahrung nach sein müßte. Die Gravitation als Fernwirkungskraft wird vielmehr nur als Spezialkraft für einen beschränkten Bereich von Erscheinungen eingeführt, und der überraschenden Tatsache der immer und überall geltenden Gleichheit von träger und schwerer Masse wird nicht weiter nachgeforscht. *Daher muß man an die Stelle des Trägheitsgesetzes ein Grundgesetz stellen, welches die Trägheitserscheinungen und die Gravitationserscheinungen umfaßt. Dies kann durch eine konsequente Durchführung des Prinzips der Relativität aller Bewegungen geschehen, wie Einstein erkannt hat. Diesen Umstand wählt Einstein daher zum Ausgangspunkt seiner Ansätze.*

Man kann den *Satz von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse*, in dem sich der enge Zusammenhang der Trägheitserscheinungen und der Gravitationserscheinungen widerspiegelt, noch von einer anderen Seite beleuchten und dadurch *seine enge Beziehung* (s. S. 10) *zu dem allgemeinen Relativitätsprinzip* aufdecken.

So sehr zwar *Newton* die Vorstellung des „absoluten Raumes" widerstrebte, glaubte er doch in dem Auftreten der Zentrifugalkräfte eine wesentliche Stütze für die Existenz des absoluten Raumes zu sehen. Rotiert ein Körper, so treten auf ihm Zentrifugalkräfte auf. Ihr Auftreten auf dem Körper gestattet, *auch ohne Gegenwart anderer sichtbarer Körper* seine Rotation nachzuweisen. Selbst wenn die Erde ständig von einer undurchsichtigen Wolkendecke eingeschlossen wäre, würde man ihre tägliche Drehung doch durch den *Foucault*schen Pendelversuch feststellen können. Aus dieser Besonderheit der Rotationen schloß *Newton* auf die Existenz absoluter Bewegungen. Rein *kinematisch* be-

Digitized by Google

trachtet, unterscheidet sich aber die Rotation der Erde in keiner Weise von der Translation; wir *beobachten* auch hier nur *Relativ*bewegungen von Körpern und könnten uns ebensogut vorstellen, daß alle Körper des Weltalls um die Erde rotierten. In der Tat hat *E. Mach* nicht nur die kinematische, sondern auch die *dynamische* Gleichwertigkeit beider Vorgänge behauptet; man muß dann aber annehmen, daß die auf der *Erdoberfläche* beobachteten *Zentrifugalkräfte* in gleichem Betrage und Verlauf auch durch die *Gravitationswirkung* der Gesamtheit aller Körper *ausgelöst* werden würden, wenn diese um die *ruhende* Erde rotierten[16]).

Die Berechtigung zu einer solchen Auffassung, die zunächst nur der kinematischen Anschauung entspringt, gibt uns im wesentlichen die Erfahrungstatsache der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper. Nach der bisherigen Auffassung werden ja die Zentrifugalkräfte durch die Trägheit des rotierenden Körpers hervorgerufen (oder vielmehr durch die Trägheit seiner einzelnen Massenpunkte, die dauernd ihrer Trägheit zu folgen suchen und daher in der Tangente an die ihnen aufgezwungenen Kreisbahnen davonfliegen möchten). Das Zentrifugalfeld ist also ein *Trägheits*feld[17]). Daß wir es ebenso gut als ein *Schwere*feld *auffassen* können — und das tun wir, sobald wir die Relativität der Rotationen auch in dynamischer Hinsicht *behaupten*, (weil wir dann annehmen müssen, daß die Gesamtheit der den ruhenden Körper umkreisenden Massen durch ihre Gravitationswirkung auf ihn die sogenannten Zentrifugalkräfte *auslösen*) —, das ist in der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper begründet, welche *Eötvös* mit außerordentlicher Genauigkeit gerade unter Benutzung der Zentrifugalkräfte der rotierenden Erde sichergestellt

Digitized by Google

hat[18]). *Man erkennt aus diesen Betrachtungen, wie ein allgemeines Prinzip der Relativität aller Bewegungen zugleich zu einer Theorie der Gravitationsfelder hinführt.*

Nach alledem kann man sich dem Eindruck nicht mehr verschließen, daß ein Aufbau der Mechanik auf ganz neuer Basis ein unbedingtes Erfordernis ist. Eine befriedigende Formulierung des Trägheitsgesetzes ohne Berücksichtigung der *Relativität aller Bewegungen* ist nicht zu erhoffen, und demgemäß auch nicht die Befreiung der Mechanik von dem unerquicklichen Begriff der absoluten Bewegung; dann aber hat die Erkenntnis von der *Trägheit der Energie* und damit der *Relativität der Trägheit* Tatsachen kennen gelehrt, welche sich überhaupt nicht in das bestehende System einfügen und eine Revision der Grundlagen der Mechanik fordern. Die Forderungen, welche wir von vornherein (s. S. 12) stellen müssen, sind: „Beseitigung der Fernwirkungen und aller der Beobachtung unzugänglichen Größen aus den Grundgesetzen; d. h. **Aufstellung einer Differentialgleichung, welche die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß der Trägheit und der Schwere umfaßt und die Relativität aller Bewegungen zum Ausdruck bringt.** Diese Forderungen erfüllt die *Einstein*sche Gravitationstheorie und allgemeine Relativitätstheorie vollkommen. Das Opfer, welches wir dabei bringen müssen, ist die allerdings fest eingewurzelte Hypothese, daß sich alle physikalischen Vorgänge in dem mit euklidischer Geometrie „ausgestatteten" Raume abspielen. Denn die Forderung der allgemeinen Relativität, die sich jetzt auch auf beschleunigte Bewegungen bezieht und die völlige Unabhängigkeit der Grundgesetze von dem gewählten Bezugssystem verlangt, läßt sich nicht mit der Einführung eines euklidischen Linienelementes in die Gesetze in Einklang bringen, da dasselbe nicht bei beliebiger Änderung des Be-

zugssystems seine Gestalt bewahrt. An seine Stelle hat deswegen das allgemeine Linienelement

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

zu treten. Während also (s. S. 27) die Forderung der Kontinuität es nur *ratsam* erscheinen ließ, nicht die beschränkenden Voraussetzungen der euklidischen Maßbestimmung einzuführen, läßt uns das Prinzip der allgemeinen Relativität keine Wahl mehr.

Die Betonung dieses Prinzips wie überhaupt der Forderung, daß nur beobachtbare Größen in den Naturgesetzen vorkommen sollen, entspringt nicht etwa nur einem formalen Bedürfnis, sondern (s. S. 12) dem Bestreben, dem Kausalitätsprinzip wirklich die Bedeutung eines für die Erfahrungswelt gültigen Gesetzes zu verleihen. Man muß unbedingt vermeiden, in die Naturgesetze neben beobachtbaren Größen noch solche einzuführen, die fiktiver Natur sind, wie z. B. der „*Raum*" der *Newton*schen Mechanik. Sonst sagt das Kausalitätsprinzip nichts wirklich über Ursachen und Wirkungen der reinen Erfahrung aus, was doch das Ziel jeder Naturbeschreibung sein muß. Die Forderung der Relativität aller Bewegungen ist aus diesem *erkenntnistheoretischen* Bedürfnis heraus zu bewerten[19]).

5.

a) Das Grundgesetz der Bewegung und das Äquivalenzprinzip der neuen Theorie.

Nach den bisherigen Darlegungen muß das Trägheitsgesetz der Mechanik durch ein ganz anderes ersetzt werden, nämlich durch ein Differentialgesetz, das erstens die Bewe-

gung eines Massenpunktes unter dem Einfluß von Trägheit *und* Schwere beschreibt, und das zweitens, auf was für ein Koordinatensystem man es auch bezieht, stets dieselbe Gestalt behält, so daß kein Bezugssystem vor einem anderen den Vorzug hat. (Die erste Bedingung entspringt der Notwendigkeit, bei der neuen Grundlegung der Mechanik den Schwereerscheinungen die gleiche Bedeutung wie den Trägheitserscheinungen zuzuerteilen — das Gesetz muß daher auch Glieder enthalten, die den Gravitationszustand des Feldes von Punkt zu Punkt kennzeichnen; die zweite Bedingung entspringt dem Postulate der allgemeinen Relativität der Bewegungen.)

Ein solches Gesetz steckt in der Bewegungsgleichung eines einzelnen, äußeren Einflüssen nicht unterworfenen Punktes der speziellen Relativitätstheorie in der Fassung:

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{-\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2}\right\} = 0.$$

Nach dieser Gleichung ist die Bahn des Punktes die „kürzeste" oder „geradeste" Linie[20]) — also „die gerade Linie", wenn das Linienelement ds das euklidische ist. Erhebt man das Prinzip der geradesten Bahn, der die wahre Bewegung folgen soll, in dieser Fassung zum allgemeinen *Differentialgesetz* für die Bewegung auch im *Gravitationsfelde* unter Berücksichtigung des Prinzips der Relativität aller Bewegungen, so muß das neue Grundgesetz lauten:

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}s\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{g_{11}\mathrm{d}x_1^2 + g_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \ldots + g_{44}\mathrm{d}x_4^2}\right\} = 0. \quad (1)$$

Denn nur diese Gestalt des Linienelementes bleibt bei beliebigen Transformationen der $x_1 \ldots x_4$ unverändert (invariant). Die zehn Koeffizienten $g_{\mu\nu}$, die im allgemeinen Funktionen der Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ sein werden, müssen zu dem Gravitationsfelde, in dem die Bewegung vor sich geht, in eine solche Beziehung gesetzt werden können, daß sie

Digitized by Google

durch das Feld bestimmt sind, und die durch die Gleichung(1) *beschriebene* Bewegung mit der *beobachteten* übereinstimmt. Dies ist in der Tat möglich. (Die $g_{\mu\nu}$ sind die Gravitationspotentiale der neuen Theorie, d. h. sie übernehmen die Rolle, welche in der *Newton*schen Theorie das eine Gravitationspotential spielt, ohne daß sie aber die speziellen Eigenschaften hätten, die nach unserer Kenntnis ein Potential sonst besitzt.)

Entsprechend den Maßverhältnissen einer auf das Linienelement

$$\mathrm{d}\,s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu$$

gegründeten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die jetzt der Mechanik wegen der Relativität aller Bewegungen zugrunde gelegt wird, müssen auch die übrigen physikalischen Gesetze so formuliert werden, daß sie von der zufälligen Wahl der Veränderlichen unabhängig sind. Bevor wir jedoch hierauf eingehen, sollen die charakteristischen Merkmale der durch die Gleichung (1) gekennzeichneten Gravitationstheorie eingehender betrachtet werden.

Die Forderung der neuen Theorie, daß die Gesetze der Mechanik nur Aussagen über *Relativ*bewegungen der Körper enthalten sollen, und daß im besonderen die Bewegung eines Körpers unter der Wirkung der Anziehung durch die *übrigen* Körper durch die Formel

$$\delta\left\{\int\sqrt{\sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu}\right\} = 0$$

beschrieben werde, erfüllt *Einstein* durch eine physikalische Hypothese über das Wesen der Gravitationserscheinungen, die er die *Äquivalenzhypothese* bzw. das *Äquivalenzprinzip*[21]) nennt. Dasselbe behauptet folgendes: *Eine etwaige Ver-*

Digitized by Google

änderung, die ein Beobachter im Ablauf eines Vorganges als Wirkung eines Gravitationsfeldes wahrnimmt, würde er genau so wahrnehmen, wenn das Gravitationsfeld nicht vorhanden wäre, er — der Beobachter — aber sein Bezugssystem in die für die Schwere an seinem Beobachtungsorte charakteristische Beschleunigung versetzte. Unterwirft man nämlich die Veränderlichen x, y, z, t in der Bewegungsgleichung für den geradlinig gleichförmig (also unbeeinflußt von der Gravitation) bewegten Massenpunkt

$$\delta\{\int \mathrm{d}s\} = \delta\{\int \sqrt{-\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2}\} = 0$$

irgendeiner Transformation, entsprechend der Überführung dieser x, y, z, t in die Koordinaten $x_1 \ldots x_4$ eines irgendwie zum Ausgangssystem der x, y, z, t beschleunigten Bezugssystems, so treten in dem transformierten Ausdruck für ds im allgemeinen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ auf, welche Funktionen der neuen Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ sind, so daß die transformierte Gleichung lautet:

$$\delta\{\int \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \ldots\ldots + g_{44}\,\mathrm{d}x_4^2}\} = 0.$$

Man wird nun (im Hinblick auf den erweiterten Geltungsbereich dieser Gleichung) die durch die Beschleunigungstransformation[22]) *erzeugten* Funktionen $g_{\mu\nu}$ ebensogut als der Wirkung eines Gravitationsfeldes entsprungen auffassen können, das sein Dasein eben in den entsprechenden Beschleunigungen kundtäte. *Die Gravitationsprobleme gehen so in die allgemeine Bewegungslehre einer Relativitätstheorie aller Bewegungen auf.*

Die Betonung der Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungsvorgängen erhebt die fundamentale Tatsache, daß *alle* Körper im Gravitationsfelde der Erde *gleich* beschleunigt fallen, zu einer grundlegenden Voraussetzung einer Theorie der Gravitationserscheinungen. Diese Tat-

Digitized by Google

sache hatte, obwohl sie zu den sichersten unserer Erfahrung zählt, in den Grundlagen der Mechanik bisher überhaupt keinen Platz gefunden. Vielmehr rückte mit dem *Galilei*schen Trägheitsgesetz ein niemals beobachteter Vorgang (die gleichförmige geradlinige Bewegung eines Körpers, der keinen äußeren Kräften unterliegt) an die erste Stelle unter den Grundgesetzen der Mechanik. Und es wurde die wunderliche Auffassung geschaffen, als wenn die Trägheitserscheinungen und die Schwereerscheinungen, die wahrscheinlich nicht minder eng miteinander verknüpft sind als die elektrischen und die magnetischen, nichts miteinander zu tun hätten. Die Erscheinung der Trägheit wird von der klassischen Mechanik als Grundeigenschaft der Materie an die Spitze gestellt, die Schwerkraft dagegen gleichsam nur als eine der vielen möglichen Kräfte der Natur durch das *Newton*sche Gesetz eingeführt. Die erstaunliche Tatsache der Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper erscheint in ihr nur als zufällig.

Das *Einstein*sche Äquivalenzprinzip weist dieser Tatsache den Platz an, der ihr in der Theorie der Bewegungserscheinungen gebührt. Das neue Bewegungsgesetz (1) soll die *Relativ*bewegungen der Körper gegeneinander unter dem Einfluß ihrer Trägheit und Schwere beschreiben. Die Trägheits- und die Gravitationserscheinungen werden durch das *eine* Prinzip der Bewegung in der geodätischen Linie ($\delta \int ds = 0$) zusammengeschweißt. Da das Bogenelement

$$ds = \sqrt{\sum_1^4 g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu}$$

bei beliebiger Transformation der Veränderlichen seine Gestalt bewahrt, so sind alle Bezugssysteme *gleich*berechtigt, d. h. keines ist vor einem anderen ausgezeichnet.

Digitized by Google

Der wichtigste Teil der Aufgabe, vor die sich *Einstein* gestellt sah, war die Aufstellung der Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$, die Gravitationspotentiale der neuen Theorie. Mit Hilfe dieser Differentialgleichungen galt es die $g_{\mu\nu}$ aus der Verteilung der das Gravitationsfeld erregenden Größen eindeutig zu berechnen; und die mit diesen $g_{\mu\nu}$ auf Grund der Gleichung (1) beschriebene Bewegung (z. B. die Planetenbewegung) mußte, wenn die Theorie zutreffen sollte, mit der beobachteten übereinstimmen.

Einstein macht sich bei der Aufstellung der Differentialgleichungen für die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ die aus der *Newton*schen Theorie gewonnenen Erfahrungen zunutze, denen zufolge in der *Poisson*schen Gleichung $\triangle \varphi = -4\pi \cdot \varrho$ für das *Newton*sche Gravitationspotential der *felderregende Faktor* (in der *Poisson*schen Gleichung die Massendichte ϱ) einem *Differentialausdruck zweiter Ordnung* des Potentials proportional gesetzt wird. Hiermit ist der Weg zu den Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ so gut wie vorgeschrieben, wenn die neuen Differentialgleichungen eine der *Poisson*schen Gleichung ähnliche Gestalt annehmen sollen.

Entsprechend unserer vertieften Auffassung von der Beziehung der Trägheit und der Schwere zueinander und von der Beziehung der Trägheit zu dem Energieinhalte der Körper treten als felderregende Größen statt der Massendichte ϱ der *Poisson*schen Gleichung die zehn Komponenten derjenigen Größe auf, die für den *energetischen* Zustand an jeder Stelle des Feldes maßgebend ist, und die schon in der speziellen Relativitätstheorie als der „*Spannungs-Energie-Tensor*" eingeführt wird.

Was die Differentialausdrücke zweiter Ordnung in den $g_{\mu\nu}$ betrifft, die dem $\triangle \varphi$ der *Poisson*schen Gleichung ent-

sprechen sollen, so hat *Riemann* folgendes gezeigt: Für die Maßverhältnisse einer auf das Linienelement

$$\mathrm{d}\,s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu$$

gegründeten Mannigfaltigkeit ist ein von der zufälligen Wahl der Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ unabhängiger Differentialausdruck vierter Ordnung (der *Riemann-Christoffel*sche Tensor) maßgebend, aus welchem alle weiteren, von der zufälligen Wahl der Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ unabhängigen und nur die $g_{\mu\nu}$ und ihre Ableitungen enthaltenden Differentialausdrücke (durch algebraische und differentielle Operationen) entwickelt werden können. Dieser Differentialausdruck führt eindeutig auf zehn Differentialausdrücke *zweiter* Ordnung in den $g_{\mu\nu}$. Und diese zehn Differentialausdrücke setzt nun *Einstein* den zehn Komponenten des Spannungs-Energie-Tensors als felderregenden Größen proportional, um die gesuchten Differentialgleichungen zu bekommen; als Proportionalitätsfaktor setzt er die Gravitationskonstante ein. **Diese Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ zusammen mit dem oben angegebenen Bewegungzprinzip stellen die Grundgesetze der neuen Theorie dar.** Sie führen in der Tat in erster Ordnung auf diejenigen Bewegungsformen, welche uns von der *Newton*schen Theorie her bekannt sind[23]). Darüber hinausgehend liefern sie aber auch ohne weitere Zusatzhypothese die einzige in der Planetentheorie aus dem *Newton*schen Gesetze nicht erklärbare Erscheinung, nämlich das Restglied in der Perihelbewegung des Merkur.

Da sich die Formeln der neuen Theorie auf eine Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit gründen, deren Linienelement die allgemeine Gestalt

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{\sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu}$$

hat, so müssen (s. S. 36) zum Abschluß der allgemeinen Relativitätstheorie auch alle übrigen physikalischen Gesetze den neuen Maßverhältnissen entsprechend eine von der zufälligen Wahl der vier Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ unabhängige Gestalt erhalten.

Für die Lösung dieser Aufgabe hat die Mathematik in dem absoluten Differentialkalkül schon die Vorarbeit geleistet; *Einstein* hat sie (in seiner Abhandlung „Über die formalen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie", Sitz.-Ber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. XLI, 1916, S. 1080) für seine besonderen Zwecke ausgebaut. *Gauß* hat den absoluten Differentialkalkül geschaffen, um in der Flächentheorie solche Eigenschaften einer Fläche zu studieren, welche von der Lage der Fläche im Raum und von unelastischen Verbiegungen derselben (Verbiegungen ohne Zerrung) nicht berührt werden, so daß sich der Wert des Linienelementes an keiner Stelle der Fläche ändert. Da solche Eigenschaften nur von den *inneren* Maßverhältnissen der Fläche abhängen, vermeidet man in der Flächentheorie die Beziehung auf das übliche Koordinatensystem, d. h. die Beziehung auf Punkte, die nicht in der Fläche selber liegen. Man legt vielmehr jeden Punkt der Fläche in der Weise fest, daß man dieselbe mit zwei beliebigen Kurvenscharen netzartig überdeckt, in welchen jede Kurve durch einen Parameter charakterisiert ist; jeder Punkt der Fläche ist dann durch die zwei Parameter der beiden Kurven, die durch ihn hindurchgehen, eindeutig bestimmt. Bei dieser Auffassung der Flächen sind z. B. ein Zylindermantel und eine Ebene nicht als verschiedenartige Gebilde zu betrachten, denn beide können ohne Dehnung aufeinander abgewickelt werden, und auf beiden gilt demgemäß die gleiche Planimetrie — ein Kriterium dafür, daß die inneren Maßverhältnisse auf diesen beiden Mannig-

faltigkeiten die gleichen sind[24]). Auf die nämliche Auffassung, aber jetzt nicht der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der Flächen, sondern der *vierdimensionalen* Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, gründet sich die allgemeine Relativitätstheorie. Da die vier Raum-Zeit-Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$, jeder physikalischen Bedeutung bar, nur als vier Parameter aufzufassen sind, wird man naturgemäß eine Darstellung für die Naturgesetze wählen, welche von der zufälligen Wahl der $x_1 \ldots x_4$ unabhängige Differentialgesetze liefert. Das leistet der absolute Differentialkalkül.

Als Ergebnis der vorangehenden Absätze, deren ganze Tragweite man freilich nur bei einem eindringenden Studium der erforderlichen mathematischen Entwicklungen erkennt, läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

Der absolute Differentialkalkül einer auf das allgemeine Linienelement

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu$$

gegründeten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ermöglicht es uns, für jedes Gesetz der speziellen Relativitätstheorie eine entsprechende allgemeinere Gestalt zu gewinnen, die von der zufälligen Wahl der vier Veränderlichen unabhängig ist. Für die zehn Funktionen $g_{\mu\nu}$, die Gravitationspotentiale der neuen Theorie, ergeben sich ohne jede Zusatzhypothese zehn Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine der *Poisson*schen Gleichung für das *Newton*sche Gravitationspotential entsprechende Gestalt besitzen.

Sie gestatten in einem gegebenen Gravitationsfelde, also wenn Massen- und Energieverteilung gegeben sind, die $g_{\mu\nu}$ eindeutig zu berechnen. Die Bewegung eines jeden Körpers

Digitized by Google

in dem vorliegenden Gravitationsfelde verläuft dann nach der Gleichung:

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0. \quad ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Diese auf den allgemeinsten Voraussetzungen aufgebaute Theorie führt in erster Ordnung auf die *Newton*schen Bewegungsgesetze zurück. Da, wo sich Abweichungen von der bisherigen Theorie offenbaren, liegen die Möglichkeiten zur experimentellen Prüfung der neuen Theorie vor. Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, wollen wir zurückschauen und uns darüber klar werden, zu welcher Stellungnahme uns die allgemeine Relativitätstheorie gegenüber den verschiedenen prinzipiellen Fragen, die im Laufe dieser Abhandlung berührt worden sind, zwingt.

b) Rückblick.

1. Die Begriffe „träge" und „schwere" Masse haben nicht mehr die absolute Bedeutung wie in der *Newton*schen Mechanik. Die „Masse" der Körper hängt vielmehr ausschließlich von der Anwesenheit und der relativen Lage der übrigen Körper des Weltalls ab. Ihr Betrag ist darum immer nur in bezug auf das System definiert, auf welches man auch ihre Bewegung bezieht. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse wird als streng gültiges Prinzip an die Spitze der Theorie gestellt. Die Äquivalenzhypothese ergänzt dabei die Folgerung der speziellen Relativitätstheorie, daß jede Energie Trägheit besitzt, indem sie jeder Energie auch eine entsprechende Schwere zuspricht. Dadurch wird es möglich, auch die Rotationen zwanglos als Relativbewegungen aufzufassen. Das Zentrifugalfeld auf einem rotierenden Körper ***kann*** als Gravitationsfeld gedeutet werden, erzeugt durch die Drehung aller Massen des Weltalls um den betreffenden

Digitized by Google

nicht rotierenden Körper. Die Mechanik wird so zu einer ganz allgemeinen Theorie der Relativbewegungen der Körper. — Da unsere Aussagen nur an Beobachtungen von Relativbewegungen anknüpfen, so erfüllt die neue Mechanik die Forderung, daß in den Naturgesetzen nur beobachtbare Dinge kausal verknüpft werden dürfen. Sie erfüllt auch die Forderung der Kontinuität, da die neuen Grundgesetze der Mechanik *Differentialgesetze* sind, die nur das Linienelement ds und keine endlichen Körperabstände enthalten.

2. Das Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit, das in der speziellen Relativitätstheorie besondere Bedeutung hatte, verliert in der allgemeinen Relativitätstheorie seine allgemeine Gültigkeit. Es behält seine Gültigkeit nur in Gebieten mit konstanten Gravitationspotentialen, wie wir solche in endlicher Ausdehnung in der Wirklichkeit niemals beobachten können. Das Gravitationsfeld auf der Erdoberfläche ist allerdings soweit konstant, daß die Lichtgeschwindigkeit im Rahmen der Genauigkeit unserer Messungen aus *Michelsons* Versuchen als eine universelle Konstante herauskommen mußte. In einem Gravitationsfelde von wechselnder Stärke ist jedoch die Lichtgeschwindigkeit *nicht* konstant; die geodätischen Linien, in denen sich das Licht ausbreitet, werden also im allgemeinen gekrümmt sein. Der Nachweis der Krümmung eines an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahles ist eine der wichtigsten Prüfungsmöglichkeiten der neuen Theorie.

3. Am stärksten hat die allgemeine Relativitätstheorie unsere Auffassung von Raum und Zeit umgewandelt*).

*) Diese Seite des Problems findet man besonders klar und ausführlich in dem Buche von Moritz Schlick „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik" (Verlag von Julius Springer) dargestellt.

Digitized by Google

Nach *Riemann* bestimmt der Ausdruck für das Linienelement hier:

$$\mathrm{d}\,s^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\,x_\mu\,\mathrm{d}\,x_\nu$$

die Maßverhältnisse der kontinuierlichen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, und nach *Einstein* haben die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des Linienelementes $\mathrm{d}\,s$ in der allgemeinen Relativitätstheorie die Bedeutung von *Gravitationspotentialen*. Größen, welche bisher rein geometrische Bedeutung gehabt haben, werden dadurch zum ersten Male physikalisch belebt. Daß dabei der Gravitation die fundamentale, die Maßgesetze in Raum und Zeit beherrschende Rolle zufällt, erscheint durchaus natürlich. Ist doch kein physikalischer Vorgang von ihrer Mitwirkung frei, da sie überall herrscht, wo Materie und Energie im Spiele sind. Sie ist überdies nach unserer bisherigen Kenntnis die einzige Kraft, die sich ganz und gar unabhängig von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit der Körper äußert. Sie hat also zweifellos eine einzigartige Bedeutung für das physikalische Weltbild.

Nach der *Einstein*schen Theorie ist also die Gravitation „der innere Grund der Maßverhältnisse von Raum und Zeit" in *Riemanns* Sinne (s. den S. 20 zitierten Schlußabsatz der *Riemann*schen Arbeit „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen"). Halten wir fest an der Anschauung des stetigen Zusammenhangs der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, so sind deren Maßverhältnisse nicht schon in ihrer Definition als einer stetigen Mannigfaltigkeit der Dimension „vier" enthalten. Wir müssen diese vielmehr erst aus der Erfahrung gewinnen. Und es ist, nach *Riemann*, Aufgabe der Physik, den inneren Grund dieser Maßverhältnisse eventuell in „darauf wirkenden bindenden

Kräften" zu suchen. Für dieses wohl zuerst von *Riemann* so klar hingestellte Problem hat *Einstein* in seiner Gravitationstheorie eine Lösung gefunden. Zugleich gibt er eine Antwort auf die Frage nach der wahren Geometrie des physikalischen Raumes, die seit einem Jahrhundert nicht mehr verstummt ist, — allerdings eine Antwort ganz anderer Art, als man erwartet hatte.

Die Alternative: euklidische oder nichteuklidische Geometrie wird nicht zugunsten einer der beiden entschieden, vielmehr wird der Raum als ein physikalisches Ding mit gegebenen geometrischen Eigenschaften aus den physikalischen Gesetzen überhaupt ausgeschieden, wie der Äther durch die *Lorentz-Einstein*sche spezielle Relativitätstheorie aus den Gesetzen der Elektrodynamik ausgeschieden wurde. Auch dies ist ein Schritt weiter im Sinne der Forderung, daß nur Beobachtbares in den Naturgesetzen Platz finden soll. Die Maßverhältnisse der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, in der sich alle physikalischen Vorgänge abspielen, haben nach *Einsteins* Auffassung ihren inneren Grund in den Gravitationszuständen. Bei der ständigen Bewegung der Körper gegeneinander wechseln diese Gravitationszustände ständig, und darum kann man auch nicht von einer unveränderlich vorgegebenen Maßgeometrie — gleichviel ob euklidischen oder nichteuklidischen — sprechen. Da die Naturgesetze in der allgemeinen Relativitätstheorie ihre Gestalt unabhängig von der zufälligen Wahl der vier Veränderlichen $x_1 \ldots x_4$ bewahren, haben diese auch keine selbständige physikalische Bedeutung. Daher werden z. B. x_1, x_2, x_3 nicht im allgemeinen drei räumliche Abstände bezeichnen, die man mit einem Meterstabe ausmessen könnte, und x_4 dann einen durch eine Uhr ermittelbaren Zeitpunkt. Die vier Veränderlichen haben nur den Charakter von vier

Digitized by Google

Zahlen, Parametern, und gestatten nicht ohne weiteres eine gegenständliche Deutung. Raum und Zeit haben für die Beschreibung der Naturvorgänge also nicht die Bedeutung von realen physikalischen Dingen.

4. Zum Unterschiede von der *Newton*schen Theorie baut sich die aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgende Gravitationstheorie nicht auf ein Elementargesetz der *Gravitationskraft* auf, sondern auf ein Elementargesetz der *Bewegung* eines Körpers im *Gravitationsfelde*. Infolgedessen spielen diejenigen Ausdrücke, welche in der neuen Theorie als die Gravitationskräfte zu *deuten* wären, nur eine untergeordnete Rolle beim Aufbau der Theorie (wie überhaupt der Kraftbegriff in der Mechanik nur als ein Hilfsbegriff zu verstehen ist, wenn man die lückenlose „Beschreibung" der Bewegungsvorgänge als die Aufgabe der Mechanik betrachtet).

Die *Einstein*sche Theorie versucht auch nicht das *Wesen* der Gravitation zu erklären; sie sucht nicht nach einem mechanischen Modell, das die Gravitationswirkung zweier Massen aufeinander versinnbildlicht. Das ist das Bestreben der verschiedenen Ätherstoßtheorien gewesen unter ausgiebiger Verwendung hypothetischer und nie beobachteter Größen, wie der Ätheratome. Es ist höchst zweifelhaft, ob solche Bestrebungen je zu einer befriedigenden Gravitationstheorie führen würden. Denn die Schwierigkeiten der *Newton*schen Mechanik liegen nicht lediglich darin, daß sie das Gravitationsgesetz als ein Fernwirkungsgesetz formuliert. Viel wesentlicher ist, daß die enge Beziehung zwischen den Trägheits- und den Schwereerscheinungen überhaupt nicht zur Geltung kommt, obwohl schon *Newton* die Tatsache der Gleichheit von schwerer und träger Masse kannte, und daß die *Newton*sche Mechanik keine Theorie der Relativbewegungen der Körper darstellt, obwohl wir nur Relativbewe-

gungen der Körper gegeneinander beobachten. Eine Umgestaltung des *Newton*schen Gesetzes der Gravitationskraft, um die Massenanziehung plausibel zu machen, würde uns darum noch nicht zu einer befriedigenden Theorie der Bewegungserscheinungen verholfen haben[25]).

Was die *Newton*sche Theorie auszeichnet, ist die außerordentliche Einfachheit ihrer mathematischen Formulierung. Darum wird auch die klassische Mechanik, die sich auf *Newtons* Ansätze aufbaut, als ausgezeichnete mathematische Theorie zur rechnerischen Verfolgung der beobachteten Bewegungsvorgänge ihre Bedeutung niemals einbüßen.

Die *Einstein*sche Theorie andererseits genügt hinsichtlich der Einheitlichkeit ihrer begrifflichen Grundlagen allen Anforderungen an eine naturwissenschaftliche Theorie. Daß sie (mit dem Verlassen der euklidischen Maßbestimmung) die geläufige Darstellung in Cartesischen Koordinaten verläßt, wird man nicht störend empfinden, sobald sich die von ihr herangezogenen Hilfsmittel der Analysis allgemeinen Eingang verschafft haben werden. Ob die neue Theorie die praktische Aufgabe der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers wesentlich erleichtern oder gar strenge lösen wird, kann man heute allerdings noch nicht sagen.

Vorerst ist es die Aufgabe der Astronomie, die Theorie an denjenigen Erscheinungen experimentell zu prüfen, bei denen sich meßbare Abweichungen von der klassischen ergeben.

6.
Die Prüfung der neuen Theorie durch die Erfahrung.

Bisher liegen drei Möglichkeiten zur experimentellen Prüfung der *Einstein*schen Gravitationstheorie vor; alle drei sind nur durch die Mitarbeit der Astronomie zu verwirk-

lichen. Die eine von ihnen — sie entspringt einer Abweichung der durch das *Einstein*sche Gesetz verlangten Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfelde von der durch das *Newton*sche verlangten — hat schon für die neue Theorie entschieden; die Entscheidung der beiden anderen, die durch die Verknüpfung elektromagnetischer Vorgänge mit der Gravitation entstehen, ist nicht so bald zu erwarten.

Da die Sonne alle anderen Körper im Sonnensystem an Masse weit überragt, so ist die Bewegung eines jeden Planeten vor allem durch das Gravitationsfeld der Sonne bedingt. Unter seiner Wirkung beschreibt der Planet nach der *Newton*schen Theorie eine *Kepler*sche Ellipse, deren große Achse, die den sonnennächsten (Perihel) und den sonnenfernsten (Aphel) Punkt der Bahn verbindet, relativ zum Fixsternsystem ruht. Über diese *Kepler*sche Bewegung eines Planeten lagern sich nun die mehr oder minder großen, aber die Form der Ellipse nicht wesentlich ändernden Einflüsse (Störungen) der übrigen Planeten; diese Einflüsse erzeugen teils nur periodische Schwankungen der Elemente der Ausgangsellipse (große Achse, Exzentrizität usw.), teils eine stetige Zu- oder Abnahme derselben. Unter die letzte Art von „Störungen" gehört auch die bei allen Planeten beobachtete langsame *Drehung* ihrer großen Achsen, und damit im Laufe der Zeit auch ihrer Perihele, relativ zum Fixsternsystem. Bei allen größeren Planeten stimmen die *beobachteten* Perihelbewegungen (bis auf kleine, noch nicht sichergestellte Abweichungen, z. B. beim Mars) mit den aus der Störungs*rechnung* folgenden überein; dagegen liefern die Rechnungen beim *Merkur* einen um 43″ pro Jahrhundert zu kleinen Wert. Zur Erklärung dieser Differenz sind die mannigfachsten Hypothesen ersonnen worden; sie sind aber

alle unbefriedigend. Sie müssen ihre Zuflucht zu noch unbekannten Massen im Sonnensystem nehmen, und da alle Nachforschungen nach Massen, die groß genug wären, um die Merkuranomalie zu erklären, vergeblich gewesen sind, müssen sie über die Verteilung dieser hypothetischen Massen Annahmen machen, die ihre *Unsichtbarkeit* erklären sollen. Allen diesen Hilfshypothesen fehlt demgemäß jede innere Wahrscheinlichkeit.

Nach der *Einstein*schen Theorie bewegt sich ein Planet, z. B. im Merkurabstand von der Sonne, unter der Wirkung der Sonnenanziehung auf der „geradesten Bahn" nach der Gleichung

$$\delta\left\{\int \mathrm{d}\,s\right\} = \delta\left\{\int \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}\,x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + \ldots + g_{44}\,\mathrm{d}\,x_4^2}\right\} = 0.$$

Die $g_{\mu\nu}$ können aus den für sie gegebenen Differentialgleichungen abgeleitet werden unter Berücksichtigung der besonderen Bedingungen, die durch die *vorausgesetzte alleinige Anwesenheit der Sonne und des als Massenpunkt gedachten Planeten* entstehen. *Einsteins* Ansatz führt in erster Näherung auch auf die *Kepler*sche Ellipse als Bahnkurve; in der zweiten Näherung zeigt sich aber, daß der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perihel- und Apheldurchgängen einen Winkel überstreicht, der ungefähr um 0,05″ größer als 180° ist, so daß pro Umlauf die große Achse der Bahn — Verbindungslinie zwischen Perihel und Aphel — sich ungefähr um 0,1″ im Sinne der Bahnbewegung gedreht hat, in hundert Jahren also — der Merkur vollendet einen Umlauf in etwa 88 Tagen — um 43″. Die neue Theorie erklärt also in der Tat *schon aus der Wirkung der Sonnengravitation* den bisher unerklärten Betrag von 43″ pro Jahrhundert in der Perihelbewegung des Merkur. (Die

Störungsbeträge der übrigen Planeten würden sich übrigens von der durch die *Newton*sche Theorie gelieferten nur ganz unwesentlich unterscheiden.) Als einzige willkürliche Konstante geht dabei in diese Rechnungen nur die Gravitationskonstante ein, welche in den Differentialgleichungen für die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$, wie schon (s. S. 40) erwähnt, als Proportionalitätsfaktor figuriert. Diese Leistung der neuen Theorie kann kaum hoch genug angeschlagen werden.

Daß zwar beim *Merkur*, dem sonnennächsten Planeten, eine meßbare Abweichung von der *Newton*schen Theorie vorhanden ist, nicht aber bei den der Sonne ferneren Planeten, beruht übrigens darauf, daß diese Abweichung mit wachsendem Abstande des Planeten von der Sonne stark abnimmt, so daß er schon im *Erd*abstande unmerklich wäre. Bei der *Venus* ist unglücklicherweise die Exzentrizität der Bahn so gering, daß die Bahn von einem Kreise kaum abweicht und die Lage des Perihels daher nur sehr unsicher zu bestimmen ist. —

Von den beiden übrigen Prüfungsmöglichkeiten der Theorie entspringt die eine dem Einfluß der Gravitation auf den zeitlichen Ablauf eines Vorganges. Wie ein solcher Einfluß entstehen kann, lehrt das folgende Beispiel: Nach der neuen Theorie kann ein Beobachter nicht ohne weiteres unterscheiden, ob eine von ihm wahrgenommene Veränderung im Ablauf eines Vorganges von einem Gravitationsfelde herrührt oder von einer entsprechenden Beschleunigung seines Beobachtungsortes (Bezugssystems). Nehmen wir nun ein unveränderliches Gravitationsfeld an, gekennzeichnet durch parallele Kraftlinien in Richtung der negativen z-Achse und durch einen konstanten Wert der Beschleunigung γ, mit der alle Körper in ihm beschleunigt

fallen, also gekennzeichnet durch Bedingungen, wie sie angenähert auf der Erdoberfläche bestehen. Irgendein Vorgang wird nach der *Einstein*schen Theorie in diesem Felde ebenso verlaufen, wie er verläuft in bezug auf ein in Richtung der positiven z-Achse um den Betrag γ beschleunigtes Koordinatensystem. Geht nun ein Lichtstrahl der Schwingungsdauer ν_1 vom Orte A, der zur Zeit des Abganges des Strahles relativ zu dem betreffenden Koordinatensystem ruhen möge, in Richtung der z-Achse nach einem im Abstande h befindlichen Orte B, so wird ein Beobachter in B infolge seiner eigenen Beschleunigung γ bei der Ankunft des Strahles die Geschwindigkeit $\gamma \cdot \frac{h}{c}$ erlangt haben (c ist die Lichtgeschwindigkeit). Nach dem normalen Dopplerprinzip wird er daher dem Lichtstrahl statt der Schwingungsdauer ν_1 die Schwingungsdauer $\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \gamma \frac{h}{c^2}\right)$ in erster Näherung zusprechen. Wenn wir denselben Vorgang in das äquivalente Gravitationsfeld verpflanzen, so nimmt dieses Resultat folgenden Ausdruck an: Die Schwingungsdauer ν_2 eines Lichtstrahles in einem Orte B, der sich von dem Orte A durch den Betrag Φ des Gravitationspotentials unterscheidet, steht auf Grund des Äquivalenzprinzips der *Einstein*schen Gravitationstheorie zu der dort beobachteten Schwingungsdauer in der Beziehung

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Dieser spezielle Fall zeigt, wie die Abhängigkeit des zeitlichen Ablaufes eines Vorganges von dem Gravitationszustande zu verstehen ist.

Nun kann man jedes (eine Spektrallinie emittierende) schwingende Gebilde als *Uhr* auffassen, deren Gang also nach

Digitized by Google

den soeben gemachten Auseinandersetzungen von dem Wert des Gravitationspotentials an ihrem Standort abhängt. Diese selbe „Uhr" wird je nach dem Gravitationspotential an einer anderen Stelle des Feldes eine andere Schwingungsdauer, d. h. einen anderen Gang, haben. Infolgedessen wird eine bestimmte Spektrallinie des von der *Sonne* kommenden Lichtes, z. B. eine Eisenlinie, im Spektroskop gegen die entsprechende Eisenlinie einer *irdischen* Lichtquelle verschoben erscheinen müssen; das Gravitationspotential an der Oberfläche der Sonne hat ja, ihrer größeren Masse entsprechend, einen anderen Wert als dasjenige an der Erdoberfläche, und eine bestimmte Schwingungsdauer (Farbe) ist ja im Spektrum durch eine bestimmte Stelle (*Fraunhofer*sche Linie) charakterisiert. Dieser Effekt, welcher für eine Wellenlänge $\gamma = 400\ \mu\mu$ ungefähr 0,008 Å beträgt, hat jedoch bisher nicht mit Sicherheit festgestellt werden können. Auch bei den Fixsternen liegen verschiedene Angriffspunkte für die Behandlung dieser Frage vor und auch Anzeichen für das Vorhandensein eines solchen Gravitationseffektes. Seine Sicherstellung ist eine wichtige Aufgabe der Stellarastronomie. —

Die dritte, *besonders wichtige Folgerung der Einsteinschen Theorie* ist die Abhängigkeit der *Lichtgeschwindigkeit* vom Gravitationspotential und die sich (auf Grund des *Huygens*schen Prinzips) dadurch ergebende *Krümmung* eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein Gravitationsfeld. Die Theorie ergibt also für einen dicht an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahl, der z. B. von einem Fixstern herkommt, eine *gekrümmte* Bahn. Infolge der Krümmung muß der Stern gegen seinen wahren Ort am Himmel um einen Betrag verrückt erscheinen, der am Sonnenrand den Wert von 1,7″ erreicht und proportional dem Abstand vom Sonnenmittelpunkte abnimmt. Da aber die Aufnahme eines

an der Sonne vorbeigehenden, von einem Fixstern herkommenden Lichtstrahls nur dann möglich ist, wenn das alles überstrahlende Licht der Sonne am Eintritt in unsere Atmosphäre gehindert wird, so kommen nur die seltenen Momente einer totalen Finsternis für diese Beobachtung und die Lösung der Aufgabe in Betracht. Es ist aber zu hoffen, daß bei der steigenden Genauigkeit der astronomischen Meßmethoden auch noch andere Angriffspunkte sich für ihre Lösung werden finden lassen.

Die experimentelle Begründung der *Einstein*schen Gravitationstheorie ist also noch nicht weit gediehen. Wenn die Theorie aber trotzdem schon heute den Anspruch auf allgemeine Beachtung erheben kann, so hat das in der ungewöhnlichen Einheit und Folgerichtigkeit ihrer Grundlagen seinen berechtigten Grund. Sie löst in Wahrheit mit einem Schlage alle Rätsel, welche die Bewegung der Körper seit *Newtons* Zeit bei der üblichen Auffassung über die Bedeutung von Raum und Zeit für die Beschreibung der Naturvorgänge aufgegeben hatte.

Anhang.

Anmerkung 1 (S. 2). Unter dem „speziellen" Relativitätsprinzip soll folgendes Postulat verstanden werden: Für die Beschreibung der physikalischen Vorgänge sind stets Bezugssysteme, die gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegt sind, gleichberechtigt. Das bedeutet: nehmen die physikalischen Gesetze in bezug auf irgendein Koordinatensystem eine besonders einfache Gestalt an, so bewahren sie dieselbe beim Übergang zu irgendeinem anderen Koordinatensystem, das gegen das erste gleichförmig geradlinig bewegt ist.

Die *Galilei-Newton*sche Mechanik stellt die gleiche Forderung für die Bewegungsgesetze. Das *Galilei-Newton*sche Relativitätsprinzip unterscheidet sich also nach seinem *mechanischen* Inhalt nicht von dem speziellen Relativitätsprinzip von *Lorentz-Einstein*. Dieses dehnt aber seinen Geltungsbereich auch auf die elektrodynamischen Gesetze aus, unter Berücksichtigung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Beide unterscheiden sich infolgedessen durch die Transformationsgleichungen, welche gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegte Koordinatensysteme, also gleichberechtigte Systeme, aufeinander beziehen. Bewegt sich ein System x', y', z', t' gleichförmig parallel der x-Achse des Systems x, y, z, t mit der Geschwindigkeit v, so lauten die Transformationsgleichungen nach dem *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzip der Mechanik:

$$x' = x - v\,t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

dagegen nach dem „speziellen" Relativitätsprinzip:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Diese sogenannten „*Lorentz*"-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie degenerieren in diejenigen der *Galilei-Newton*schen Theorie, wenn man in ihnen $v/c = 0$ setzt, d. h. die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß neben der Geschwindigkeit v der Systeme relativ zueinander auffaßt. Auf die Bedeutung dieses Umstandes gehe ich im Abschnitt 3 b, S. 25, noch einmal ein.

Im übrigen sind die Gesichtspunkte, welche zum Aufgeben des *Galilei-Newton*schen Relativitätsprinzips zugunsten des „speziellen" Relativitätsprinzips von *Einstein-Lorentz* geführt haben, in den letzten Jahren vielfach eingehend diskutiert worden.

Literatur: *A. Einstein*, Zur Elektrodynamik bewegter Medien, Annalen der Physik 4. Folge, Bd. 17, S. 891.

M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Sammlung „Die Wissenschaft" Bd. 38, Braunschweig 1913.

J. Petzoldt, Die Relativitätstheorie der Physik, Zeitschrift für positivistische Philosophie, 2. Jahrgang, Nr. 1.

Anmerkung 2 (S. 16). Daß für *jedes* Punktepaar im Raum ein und dieselbe Größenbeziehung existiert, nämlich der gegenseitige *Abstand*, und daß mit Hilfe dieser Beziehung jedes Punktpaar mit jedem andern verglichen werden kann, das ist das charakteristische Merkmal, das den Raum von den übrigen uns bekannten kontinuierlichen Mannigfaltigkeiten auszeichnet. Den gegenseitigen Abstand zweier Punkte auf dem Fußboden und den gegenseitigen Abstand zweier senkrecht übereinander liegender Punkte an der Wand des Zimmers messen wir mit denselben Maßstäben aus, den wir nach Belieben in jede Richtung legen können. Wir können deswegen den gegenseitigen Abstand des Punktpaares auf dem Fußboden mit dem gegenseitigen Abstand jedes anderen Punktpaares an der Wand „vergleichen".

In dem System der Töne liegen im Gegensatz hierzu die Verhältnisse ganz anders. Das System der Töne stellt eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2 dar, wenn man jeden Ton durch seine Höhe und seine Stärke in der Gesamtheit festlegt. Es ist jedoch nicht möglich, zu vergleichen: den „Abstand" zweier Töne *gleicher Höhe* aber *verschiedener Stärke* (Analogon

Digitized by Google

zu den zwei Punkten auf dem Fußboden) mit dem „Abstand" zweier Töne *verschiedener Höhe* aber *gleicher Stärke* (Analogon zu den zwei Punkten an der Wand). Die Maßverhältnisse sind also in dieser Mannigfaltigkeit durchaus anders.

Auch im System der Farben haben die Maßverhältnisse ihre Besonderheit. Die Dimension der Mannigfaltigkeit der Farben ist die gleiche wie die des Raumes, da jede Farbe aus den *drei* „Grundfarben" durch Mischung hergestellt werden kann. Zwischen zwei beliebigen Farben besteht aber keine Beziehung, die dem Abstande zweier Raumpunkte entspräche. Erst wenn man aus beiden Farben durch Mischung eine dritte ableitet, so gelangt man zu einer Gleichung zwischen diesen drei Farben ähnlich derjenigen, welche drei auf einer geraden Linie liegende Raumpunkte verknüpft.

Diese Beispiele, die den Aufsätzen von *Helmholtz* entlehnt sind, zeigen, daß die Maßverhältnisse einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit nicht schon mit ihrer Definition als einer *kontinuierlichen* Mannigfaltigkeit und mit der Festlegung ihrer Dimension gegeben sind. Eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit ist im allgemeinen verschiedener Maßverhältnisse fähig. Erst die Erfahrung ermöglicht, die für jede Mannigfaltigkeit gültigen Maßgesetze abzuleiten. Die Erfahrung, daß die Dimensionen der Körper von ihrer speziellen Lage und Bewegung unabhängig sind, führte auf die Gesetze der euklidischen Geometrie; in ihr ist die *Kongruenz* für die Vergleichung verschiedener Raumteile ausschlaggebend. Diese Fragen hat *Helmholtz* in verschiedenen Abhandlungen erschöpfend behandelt.

Literatur: *Helmholtz*, Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie, Wiss. Abh. *2*, S. 610.

Helmholtz, Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen, Wiss. Abh. *2*, S. 618.

Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vorträge und Reden 2 Bd., S. 1.

Anmerkung 3 (S. 16). Die Forderung der freien Beweglichkeit endlicher starrer Körper läßt sich am anschaulichsten im Gebiete des Zweidimensionalen erläutern. Denken wir uns auf einer *Kugel* und einer *Ebene* je ein Dreieck gezeichnet, auf ersterem durch Bögen größter Kreise begrenzt, auf der Ebene durch gerade Linien, so kann man diese Dreiecke längs beider Ober-

flächen nach Belieben verschieben und kann sie mit anderen zur Deckung bringen, ohne daß sich dabei die Längen der Seiten und die Winkel veränderten. Dies ist, wie *Gauß* nachgewiesen hat, möglich, weil die *Krümmung* an jeder Stelle der Kugel (bzw. Ebene) den gleichen Betrag hat wie an jeder anderen Stelle. Und doch ist die Geometrie auf der *Kugel* eine andere wie die auf der *Ebene*, weil diese beiden Gebilde nicht ohne Zerrung aufeinander abwickelbar sind (s. Anm. 24). Auf *beiden* lassen sich aber die planimetrischen Gebilde frei bewegen, und es gelten infolgedessen auf ihnen Kongruenzsätze. Bestimmte man dahingegen auf irgendeiner eiförmigen Fläche ein Dreieck durch die drei kürzesten Verbindungslinien dreier Punkte auf ihr, so käme zutage, daß an verschiedenen Stellen dieser Oberfläche sich Dreiecke mit gleichen Seitenlängen zwar konstruieren lassen, dieselben schließen jedoch andere Winkel als die entsprechenden Seiten des Ausgangsdreiecks ein, und infolgedessen wären sich solche Dreiecke mit gleichen Seitenlängen nicht kongruent. Auf einer eiförmigen Fläche sind also die Figuren nicht ohne Dimensionsänderung verschiebbar, und man gelangt bei dem Studium der geometrischen Verhältnisse auf ihr nicht zu Kongruenzsätzen der bekannten Art. Ganz analoge Betrachtungen lassen sich im Drei- und Vierdimensionalen anstellen, *aber natürlich nicht sinnlich veranschaulichen*. Verlangen wir, daß im Raum die Körper ohne Dimensionsänderungen frei beweglich sein sollen, so muß die „*Krümmung*" des Raumes an jeder Stelle die gleiche sein. Der Begriff der Krümmung einer mehr als zweidimensionalen Mannigfaltigkeit läßt sich dabei mathematisch streng formulieren; die Bezeichnung deutet nur auf ihre analoge Bedeutung, wie sie dem Begriffe der Krümmung einer Fläche zukommt, hin. Auch im Dreidimensionalen lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden, wie die der Kugel oder Ebene im Zweidimensionalen. Der Kugel entspricht ein nichteuklidischer Raum konstanter positiver Krümmung, der Ebene der euklidische Raum der Krümmung Null. In beiden Räumen lassen sich die Körper ohne Dimensionsänderung frei bewegen; aber der euklidische Raum ist zugleich unendlich ausgedehnt, während der „sphärische" Raum zwar unbegrenzt, wie die Oberfläche der Kugel, aber nicht unendlich ausgedehnt ist. Man findet

diese Fragen in dem bekannten Aufsatz von *Helmholtz* „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" (Vorträge und Reden Bd. 2, S. 1) außerordentlich schön und ausführlich dargestellt.

Anmerkung 4 (S. 17). Die Eigenschaften, die der analytische Ausdruck für die Länge des Linienelementes haben muß, lassen sich folgendermaßen erkennen:

Auf irgendeiner kontinuierlichen Mannigfaltigkeit, z. B. einer Fläche, mögen die Zahlen x_1, x_2 irgendeinen Punkt bezeichnen. Dann ist mit diesem Punkte zugleich eine gewisse „Umgebung" des Punktes gegeben, die lauter Punkte der Fläche enthält. — *D. Hilbert* hat in seinen „Grundlagen der Geometrie" (S. 177) den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe (Mannigfaltigkeit) auf mengentheoretischer Grundlage streng definiert. In dieser Definition gibt der Begriff der „Umgebung" eines Punktes der *Riemann*schen Forderung des *kontinuierlichen* Zusammenhangs zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit eine strenge Fassung. — Man kann nun von dem Punkte x_1, x_2 ausgehend in seine Umgebung stetig hineinwandern und an jeder Stelle, z. B. an einem Orte $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, nach der „Entfernung" dieses Punktes vom Ausgangspunkt fragen. Die Funktion, welche diese Entfernung *mißt*, wird von den Werten x_1, x_2, dx_1, dx_2 abhängen und wird an jedem *Zwischenpunkt* des Weges, der uns von x_1, x_2 nach dem Punkte $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$ geführt hat, gewisse, sich stetig ändernde, und zwar, wie wir voraussetzen können, stetig *wachsende* Werte durchlaufen. Im Punkte x_1, x_2 selbst wird sie den Wert Null annehmen, für jeden sonstigen Punkt der Umgebung positiv sein müssen. Ferner wird man erwarten, daß, wenn für irgendeinen Zwischenpunkt, er sei durch die Zahlen $x_1 + d\xi_1$, $x_2 + d\xi_2$ gekennzeichnet, $d\xi_1 = {}^1/_2\, dx_1$, $d\xi_2 = {}^1/_2\, dx_2$ ist, in diesem Punkte die gesuchte, die Entfernung messende Funktion, einen Betrag annimmt, der die Hälfte des Betrages im Punkte $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$ ist. Unter diesen Annahmen wird die gesuchte Funktion homogen und vom 1. Grade in den dx sein; ihr Wert wird nämlich dann mit demjenigen Faktor multipliziert erscheinen, um welchen man die dx eventuell vergrößert. Ferner soll sie, wenn alle $dx = 0$ sind, selbst verschwinden, und wenn alle dx ihr Vorzeichen ändern, ihren, stets positiven,

Wert nicht ändern. Man sieht ohne weiteres ein, daß die Funktion

$$ds = \sqrt{g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_{22}\,dx_2^2}$$

allen diesen Anforderungen gerecht wird; sie ist aber keineswegs die einzige Funktion dieser Art.

Anmerkung 5 (S. 20). Der Ausdruck vierter Ordnung für das Linienelement würde aber z. B. keine geometrische Interpretation der Formeln gestatten, wie das bei dem Ausdrucke

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{12}\,dx_1\,dx_2 + \ldots g_{33}\,dx_3^2$$

möglich ist, den man als allgemeinen Fall des pythagoreischen Lehrsatzes auffassen kann.

Anmerkung 6 (S. 20). Unter einer „diskreten" Mannigfaltigkeit versteht man eine solche, bei welcher zwischen den einzelnen Elementen kein kontinuierlicher Übergang möglich ist, sondern jedes Element gewissermaßen ein selbständiges Individuum darstellt. Eine solche Mannigfaltigkeit stellt z. B. die Menge aller ganzen Zahlen dar, oder auch die Menge aller *Planeten* im Sonnensystem u. a. m.; überhaupt, die abzählbaren Mengen der Mengenlehre sind solche diskreten Mannigfaltigkeiten. Das „Messen" in einer diskreten Mannigfaltigkeit geschieht einfach durch das „Zählen" und stellt uns keine besonderen Probleme, da alle Mannigfaltigkeiten dieser Art diesem gleichen Meßprinzip unterliegen. Wenn *Riemann* dann fortfährt: „Es muß also entweder das dem Raum zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden", so will er damit nur eine Möglichkeit andeuten, die uns allerdings zur Zeit noch fernliegt, prinzipiell aber immer offen gelassen werden muß. Gerade in den letzten Jahren ist für eine andere Mannigfaltigkeit, die in der Physik eine große Rolle spielt, nämlich für die „Energie" ein ähnlicher Wechsel in der Auffassung tatsächlich geschehen und man wird an diesem Beispiele den Sinn obiger Andeutung am leichtesten verstehen.

Bis vor wenigen Jahren faßte man die Energie, die ein Körper durch Strahlung abgibt, als eine kontinuierlich veränderliche Größe auf und versuchte darum ihren jeweiligen Betrag durch eine stetig veränderliche Zahlenfolge zu ***messen***.

Digitized by Google

Die Untersuchungen von *M. Planck* haben jedoch zu der Anschauung geführt, daß diese Energie *quantenhaft* emittiert wird und deshalb das „Messen" ihres Betrages auf ein „Zählen" der Quanten hinausläuft. Das der Strahlungsenergie hiernach zugrunde liegende Wirkliche wäre also eine diskrete, nicht eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit. Setzen wir nun den Fall, daß die Auffassung immer fester Fuß faßte, einerseits, daß alle Abmessungen im Raum sich nur auf Abstände von Ätheratomen bezögen, andererseits die Abstände einzelner Ätheratome voneinander nur bestimmter Werte fähig seien, so würde man alle Abstände im Raum durch „Zählen" dieser Werte erhalten und den Raum als eine diskrete Mannigfaltigkeit aufzufassen haben.

Anmerkung 7 (S. 22). *C. Neumann*, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870, S. 18.

Anmerkung 8 (S. 22). *H. Streintz*, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883.

Anmerkung 9 (S. 24). *A. Einstein*, Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. *17*, S. 891.

Anmerkung 10 (S. 25). *Ph. Frank* und *H. Rothe*, Ann. d. Phys., 4. Folge, Bd. *34*, S. 825.

Die Voraussetzungen für die allgemeinen Transformationsgleichungen, durch welche zwei Systeme S und S', die sich *gleichförmig geradlinig* mit der Geschwindigkeit q gegeneinander bewegen, aufeinander bezogen werden, lauten:

1. Die Transformationsgleichungen bilden eine lineare homogene Gruppe mit dem variablen Parameter q. D. h. also: Die Aufeinanderfolge zweier Transformationsgleichungen, von denen die eine das System S auf S' bezieht und die zweite S' auf $S'' — S$ soll gegen S' die konstante Geschwindigkeit q, S' gegen S'' die konstante Geschwindigkeit q' haben — führt wieder zu einer Transformationsgleichung der gleichen Gestalt, wie sie die Ausgangsgleichungen haben; der in der neuen Gleichung auftretende Parameter q'' hängt in bestimmter Weise von q' und q ab.

2. Die Kontraktionen der Längen hängen nur von dem Betrage des Parameters q ab. — Man muß natürlich von Anfang an mit der Möglichkeit rechnen, daß die Länge eines Stabes vom ruhenden System aus gemessen anders ausfällt,

als wie im bewegten System gemessen. Die Bedingung 2 verlangt nun, daß, wenn sich Kontraktionen (d. h. Änderungen der Längen bei diesen verschiedenen Bestimmungsweisen) offenbaren, diese dem Betrage nach nur von der *Größe* der Geschwindigkeit beider Systeme zueinander und nicht von der Richtung ihrer Bewegung im Raum abhängen sollen. Diese Forderung erteilt also dem Raum die Eigenschaft der Isotropie und entspricht ungefähr derjenigen Forderung des Abschnittes 3 a, daß jedes Linienelement unabhängig von Ort und Richtung mit jedem anderen der Länge nach verglichen werden kann.

Wesentlich ist, daß in beiden Voraussetzungen 1. und 2. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit *nicht* verlangt wird. Vielmehr ist die *ausgezeichnete* Eigenschaft einer bestimmten Geschwindigkeit, in *allen* durch solche Transformationen auseinander hervorgehenden Systemen, ihren Wert beizubehalten, eine strenge Folgerung dieser beiden allgemeinen Forderungen, und das Ergebnis des *Michelson*schen Versuches nur die Festlegung des *Betrages* dieser ausgezeichneten Geschwindigkeit, welcher natürlich nur durch die Erfahrung gewonnen werden konnte.

Anmerkung 11 (S. 26). *Minkowski* hat diese Folgerung des speziellen Relativitätsprinzips als erster mit besonderem Nachdruck hervorgehoben.

Anmerkung 12 (S. 28). Die Bezeichnung „Inertialsystem" war ursprünglich nicht mit dem System verknüpft, das *Neumann* mit dem hypothetischen Körper Alpha verband. Man versteht aber jetzt allgemein unter einem Inertialsystem ein geradliniges Koordinatensystem, in bezug auf welches ein nur seiner Trägheit unterworfener Massenpunkt sich geradlinig gleichförmig bewegt. Während *C. Neumann* den Körper Alpha als ein durchaus hypothetisches Gebilde zur Formulierung des Trägheitsgesetzes erfand, glaubten nachfolgende Untersuchungen, speziell solche von *L. Lange*, daß auf Grund strenger kinematischer Überlegungen ein Koordinatensystem abgeleitet werden könne, das die Eigenschaften eines solchen Inertialsystems besitze. Wie aber *C. Neumann* und *J. Petzoldt* gezeigt haben, enthielten diese Entwicklungen fehlerhafte Voraussetzungen und geben dem Trägheitsgesetz keine besser fundierte Grundlage als der von *Neumann* eingeführte Körper Alpha.

Ein solches Inertialsystem legen übrigens diejenigen geraden Linien fest, welche drei unendlich weit voneinander entfernte Massenpunkte verbinden, die sich gegenseitig also nicht beeinflussen und auch sonst keinen Kräften unterliegen. Man ersieht aus dieser Definition, warum in der Natur ein Inertialsystem nicht zu finden sein wird und warum infolgedessen das Trägheitsgesetz naturwissenschaftlich befriedigend nie wird formuliert werden können.

Literatur: *C. Neumann*, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie. Leipzig 1870.

L. Lange, Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phil. Klasse 1885.

L. Lange, Die Geschichte der Entwickelung des Bewegungsbegriffes, Leipzig 1886.

H. Seeliger, Ber. der Bayr. Akad. 1906, Heft 1.

C. Neumann, Bericht der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Klasse 1910, Bd. *62*, S. 69 und 383.

J. Petzoldt, Ann. der Naturphilosophie, Bd. 7.

Anmerkung 13 (S. 29). *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 4. Aufl., S. 244.

Anmerkung 14 (S. 30). Die neuen Gesichtspunkte über das Wesen der Trägheit entstammen dem Studium der elektromagnetischen Strahlungsvorgänge. Die spezielle Relativitätstheorie hat sie dann durch den Satz von der Trägheit der Energie dem ganzen Gebäude der theoretischen Physik organisch eingegliedert. Die Dynamik der Hohlraumstrahlung, d. h. die Dynamik eines von masselosen Wänden begrenzten und mit elektromagnetischer Strahlung erfüllten Raumes lehrte, daß ein solches System jeder Bewegungsänderung einen Widerstand entgegensetzt, wie ein bewegter schwerer Körper. Das Studium der Elektronen (freier elektrischer Ladungen) in frei beweglichem Zustande, z. B. in einer Kathodenröhre, lehrte desgleichen, daß diese kleinsten Teilchen sich wie träge Körper verhalten, ihre Trägheit jedoch nicht durch Materie bedingt wird, an welche ihre Ladung gebunden wäre, sondern durch die elektromagnetischen Feldwirkungen, denen das bewegte Elektron unterliegt. Daraus entstand der Begriff der scheinbaren (elektromagnetischen) Masse eines Elektrons. Die spezielle Relativitätstheorie führte schließlich zu der Erkennt-

nis, daß *aller* Energie die Eigenschaft der Trägheit zuzusprechen sei.

Ein jeder Körper enthält Energie (z. B. in seinem Inneren einen bestimmten Betrag in Form von Wärmestrahlung). Die Trägheit, die er offenbart, ist also zum Teil auf das Konto dieses Energieinhaltes zu setzen. Da dieser Anteil nach der speziellen Relativitätstheorie eine relative, d. h. von der Wahl des Bezugssystems abhängige Größe darstellt, so kommt auch dem Gesamtbetrag der trägen Masse dieses Körpers kein absoluter, sondern nur ein relativer Wert zu. Nun verteilt sich dieser Energieinhalt an strahlender Wärme bei jedem Körper über sein ganzes Volumen, man wird also von dem Energieinhalte der Volumeinheit sprechen können und daraus den Begriff der *Energiedichte* ableiten. Diese Dichte der Energie ist dann auch eine dem Betrage nach vom Bezugssystem abhängige Größe.

Literatur: *M. Planck*, Ann. der Phys., 4. Folge, Bd. 26.

M. Abraham, Elektromagnetische Energie der Strahlung, 2. Aufl. 1908.

Anmerkung 15 (S. 30). Die Bestimmung der trägen Masse eines Körpers durch die Messung seines Gewichtes ist nur auf Grund der Erfahrungstatsache möglich, daß alle Körper in dem Gravitationsfelde an der Oberfläche der Erde mit gleicher Beschleunigung fallen. Nennt man p und p' die Drucke zweier Körper auf die gleiche Unterlage (Gewicht), g die Beschleunigung im Schwerefeld der Erde am betreffenden Beobachtungsorte, so ist

$$p = m \cdot g \; Dynen \quad \text{bzw.} \quad p' = m' \cdot g \; Dynen,$$

wobei m und m' die zwei Proportionalitätsfaktoren sind, die man die *Massen* der betreffenden zwei Körper nennt. Da in beiden Gleichungen derselbe Wert g eingeht, so ist

$$\frac{p'}{p} = \frac{m'}{m},$$

und man kann demgemäß die Massen der Körper an demselben Ort durch ihre *Gewichte* messen.

Obwohl schon *Newton* gezeigt hatte, daß alle Körper an demselben Erdorte gleichbeschleunigt fallen (wenn man die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Körper eliminiert), so

Digitized by Google

hat doch diese höchst merkwürdige Tatsache in den Grundlagen der Mechanik keinen Platz gefunden. Erst das „Äquivalenzprinzip" von *Einstein* (s. Abschnitt 4, S. 37) räumt ihr die Stellung ein, die ihr unzweifelhaft zukommt.

Anmerkung 16 (S. 32). *B.* und *J. Friedländer* haben aus denselben Überlegungen heraus ein Experiment vorgeschlagen, um die Relativität der Rotationsbewegungen, mithin die Umkehrbarkeit der Zentrifugalerscheinungen darzutun. („Absolute und relative Bewegung." Berlin, Leonhard Simion 1896.) Wegen der Kleinheit des Effektes ist dasselbe zwar zur Zeit nicht durchführbar, es ist aber durchaus geeignet, den physikalischen Inhalt dieser Forderung dem Verständnis näher zu bringen.

„Das empfindlichste aller Instrumente ist bekanntlich die Drehwage. Die größten rotierenden Massen, mit denen wir experimentieren können, sind aber wohl die großen Schwungräder in Walzwerken und anderen großen Fabriken. Die Zentrifugalkräfte äußern sich bekanntlich in einem von der Rotationsachse zu entfernen strebenden Drucke. Stellen wir also eine Drehwage in nicht zu großer Entfernung von einem großen Schwungrade auf, so daß der Aufhängungspunkt des drehbaren Teils der Drehwage (der Nadel) genau oder annähernd in der Verlängerung der Achse des Schwungrades liegt, so müßte sich die Nadel, wenn sie nicht von vornherein der Ebene des Schwungrades parallel war, sich dieser Lage zu nähern streben und einen entsprechenden Ausschlag geben. Auf jeden, nicht in der Umdrehungsachse liegenden Massenteil wirkt nämlich die Zentrifugalkraft in dem Sinne, daß sie ihn von der Achse zu entfernen strebt. Man sieht sofort, daß eine möglichst weitgehende Entfernung erreicht wird, wenn die Nadel parallel steht."

Der von *B.* und *J. Friedländer* vorgeschlagene Versuch stellt nur eine Variante desjenigen Versuches dar, welcher *Newton* zu seiner Auffassung über den absoluten Charakter der Rotation geführt hat. *Newton* hängte ein zylindrisches mit Wasser gefülltes Gefäß an einem Faden auf, drehte es so lange um die durch den Faden definierte Achse herum, bis der Faden ganz steif war. Wenn dann Gefäß und Flüssigkeit sich völlig in Ruhe befanden, ließ er den Faden sich wieder ablösen, wobei

Gefäß und Flüssigkeit in schnelle Rotation geraten, und beobachtete dabei folgendes: Unmittelbar nach dem Loslassen nahm *nur* das Gefäß an der Rotation teil, da die Reibung des Wassers an den Wänden desselben nicht hinreicht, um der Flüssigkeit sofort die Rotation zu übermitteln. Solange das der Fall war, blieb die Oberfläche des Wassers eine horizontale Ebene. Je mehr aber das Wasser von den rotierenden Wänden mitgerissen wurde, um so deutlicher traten die Zentrifugalkräfte in Erscheinung und trieben das Wasser an den Wänden hoch, so daß schließlich seine Oberfläche die Form eines Rotationsparaboloids annahm. Aus dieser Wahrnehmung schloß *Newton*, daß die *Relativrotation* der Gefäßwände gegen das Wasser in demselben keine Kräfte auslöst. Erst wenn das Wasser selbst an der Rotation teilnimmt, machen sich die Zentrifugalkräfte bemerkbar. Daraus schloß er auf den *absoluten* Charakter der Rotationen.

Dieser Versuch ist in späterer Zeit vielfach diskutiert worden, und schon *E. Mach* hat gegen die Folgerung *Newtons* den Einwand erhoben, daß man nicht ohne weiteres behaupten könne, daß die Relativrotation der Gefäßwände gegen das Wasser überhaupt ohne Einfluß auf dasselbe sei. Es sei sehr gut denkbar, daß, wenn die Masse des Gefäßes groß genug wäre, also z. B. seine Wandstärke viele Kilometer stark, daß dann bei einem rotierenden Gefäß die Oberfläche des ruhenden Wassers nicht eben bliebe. Dieser Einwand steht mit der Auffassung der allgemeinen Relativitätstheorie durchaus im Einklang. Nach dieser können die Zentrifugalkräfte auch als die Gravitationskräfte aufgefaßt werden, die die Gesamtheit der um das Wasser rotierenden Massen auf dasselbe ausüben. Die Gravitationswirkung der Gefäßwände auf die eingeschlossene Flüssigkeit ist natürlich verschwindend gering gegenüber der aller Massen des Weltalls. Erst wenn das Wasser gegenüber diesen sich in Rotation befindet, sind merkliche Zentrifugalkräfte zu erwarten. Der Versuch der Brüder *B.* und *J. Friedländer* sollte nun den von *Newton* angestellten Versuch verfeinern, indem an die Stelle des Wassers eine empfindliche Drehwage gesetzt wurde, die schon minimalen Kräften nachgibt, und an die Stelle des Gefäßes die Masse eines gewaltigen Schwungrades trat. Aber auch diese Anordnung kann zu keinem positiven

Ergebnis führen, da auch das größtmögliche Schwungrad, das zur Zeit Verwendung finden könnte, doch nur eine verschwindend kleine Masse gegenüber den Massen des Weltalls darstellt.

Anmerkung 17 (S. 32). Von Kraft*feldern* spricht man dann, wenn die betreffende Kraft von Ort zu Ort stetig veränderlich ist und an jedem Ort durch den Wert einer Funktion des Ortes gegeben wird. Die Zentrifugalkräfte im Innern und an der Oberfläche eines rotierenden Körpers haben eine solche feldmäßige Verteilung über das ganze Volumen des Körpers, und es steht nichts im Wege, dieses Feld auch über die Oberfläche des Körpers hinaus fortgesetzt zu denken, z. B. über die Oberfläche der Erde hinaus in ihre Atmosphäre. Man wird also kurz von dem Zentrifugalfeld der Erde sprechen; und da die Zentrifugalkräfte nach den bisherigen Anschauungen nur durch die *Trägheit* der Körper bedingt sind und nicht durch ihre *Schwere*, so ist dieses Feld ein *Trägheitsfeld* im Gegensatz zum *Schwerefeld*, unter dessen Einfluß alle Körper, die nicht unterstützt oder aufgehängt sind, auf der Erde fallen.

Auf der Erde überlagern sich demgemäß die Wirkungen mehrerer Kraftfelder: die Wirkung des *Schwerefeldes*, das von der Gravitation der Massenteilchen der Erde aufeinander herrührt und das zum Erdzentrum hingerichtet ist; die Wirkung des *Zentrifugal*feldes, welches nach *Einstein* auch als ein *Schwerefeld* aufgefaßt werden kann, und dessen Kraftwirkung parallel der Ebene der Breitenkreise nach außen gerichtet ist; schließlich die Wirkung des *Schwerefeldes* der verschiedenen Himmelskörper, in erster Linie der Sonne und des Mondes.

Anmerkung 18 (S. 33). *Eötvös* hat das Resultat seiner Messungen in den „Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn" Bd. *VIII*, S. 64, 1891 veröffentlicht.

Während die früheren Untersuchungen über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen von *Newton* und *Bessel* (Astr. Nachr. *10*, S. 97, und Abhandlungen von Bessel Bd. *III*, S. 217) sich auf Pendelbeobachtungen gründen, hat *Eötvös* mit empfindlichen Torsionswagen gearbeitet.

Die Kraft, infolge welcher alle Körper fallen, setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: aus der *Anziehungskraft der Erde*, welche (bis auf Abweichungen, die vorerst vernachlässigt werden können) nach dem Erdmittelpunkt gerichtet ist,

und der *Zentrifugalkraft*, welche parallel den Breitenkreisen nach außen gerichtet ist. Wäre die Anziehungskraft der Erde auf zwei Körper gleicher Masse, aber aus verschiedenem Stoff verschieden, so müßte die Resultante aus Anziehungs- und Zentrifugalkraft für dieselben verschiedene Richtungen haben. *Eötvös* schreibt sodann: „Durch Rechnung finden wir, daß, wenn die Anziehung der Erde auf zwei Körper von gleicher Masse, jedoch von verschiedener Substanz um ein Tausendstel verschieden wäre, die Richtungen der Schwere der beiden Körper miteinander einen Winkel von 0,356 Sek., das ist ungefähr eine Drittelsekunde, bilden würden; und wenn die Differenz in der Anziehungskraft ein Zwanzigmillionstel betrüge, müßte dieser Winkel $^{356}/_{20}$ Mill. Sek. haben, das ist etwas mehr als eine Sechzigtausendstel-Sekunde"; und weiterhin:

„Ich befestige in meinen Torsionswagen an den Enden eines Wagebalkens von 25—50 cm Länge, welcher an einem dünnen Platindraht hing, einzelne Körper von ungefähr 30 g Gewicht. Nachdem der Balken senkrecht auf den Meridian gestellt wurde, bestimmte ich genau seine Lage mittels eines sich mit ihm bewegenden und eines an dem Kasten des Instrumentes befestigten Spiegels. Dann drehte ich das Instrument samt Kasten um 180°, so zwar, daß der Körper, der sich früher am östlichen Ende des Balkens befand, jetzt an das westliche Ende kam, und nun bestimmte ich von neuem die Lage des Balkens zum Instrument. Wenn die Schweren der an den beiden Seiten angebrachten Körper verschieden gerichtet wären, so müßte eine Torsion des Aufhängedrahtes erfolgen. Das zeigte sich aber nicht, wenn mit der auf der einen Seite konstant angebrachten Messingkugel auf der anderen Seite Glas, Korkholz oder Antimonkristalle befestigt waren; und doch müßte eine Abweichung von $^1/_{60\,000}$ Sekunde in der Richtung der Schwerkraft eine Torsion von einer Minute, welche genau beobachtbar ist, hervorrufen."

Eötvös erreicht also eine Genauigkeit, wie sie ungefähr beim Wägen erreicht wird, und das war sein Ziel, denn die Methode, durch Wägen die Masse der Körper zu bestimmen, beruht ja auf dem Grundsatze, daß die Anziehung der Erde auf verschiedene Körper nur von deren Masse und nicht von ihrer substanziellen Beschaffenheit abhängt. Dieser Grundsatz mußte also

mit einem gleichen Grade von Genauigkeit bewiesen sein, wie sie bei Wägungen erreicht wird. Wenn überhaupt ein solcher Unterschied in der Schwere verschiedener Körper gleicher Masse, aber verschiedener Substanz vorhanden sein sollte, so ist derselbe, nach *Eötvös*, für Messing, Glas, Antimonit, Korkholz kleiner als ein Zwanzigmillionstel, für Luft und Messing kleiner als ein Hunderttausendstel.

Anmerkung 19 (S. 34). S. a. *A. Einstein*, Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. 4. Folge, Bd. *49*, S. 769.

Anmerkung 20 (S. 35). Die Gleichung $\delta \{\int ds\} = 0$ besagt, daß die Variation der Weglänge zwischen zwei genügend nahen Punkten der Bahn für die wirklich eingeschlagene Bahn verschwindet; d. h. unter allen möglichen Bahnen zwischen zwei solchen Punkten wählt die wahre Bewegung die kürzeste aus. Bleibt man vorerst auf dem Boden der alten Mechanik, so wird folgendes Beispiel den Sinn dieses Grundsatzes klarlegen: Bei der Bewegung eines Massenpunktes, der im Raum frei beweglich ist, ist die gerade Linie immer die kürzeste Verbindungslinie zweier Raumpunkte, und der Massenpunkt wird sich auf dieser geraden Linie von dem einen Punkt zu dem anderen hinbewegen, wenn nicht sonstige störende Einflüsse vorliegen (Trägheitsgesetz). Ist der Massenpunkt gezwungen, auf irgendeiner krummen Fläche sich zu bewegen, so wird er längs einer geodätischen Linie dieser Fläche von einem Punkte zu einem anderen schreiten, da die geodätischen Linien die kürzesten Verbindungslinien der Punkte auf der Fläche darstellen. — In der *Einstein*schen Theorie gilt nun ein ganz entsprechendes, nur viel allgemeineres Prinzip. Unter dem Einfluß von *Trägheit und Schwere* schreitet jeder Massenpunkt längs der geodätischen Linien der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit hin. Daß diese Linien im allgemeinen keine *geraden* Linien sind, beruht darauf, daß das Gravitationsfeld den Massenpunkt gewissermaßen einem Zwang unterwirft, so etwa wie die krumme Fläche die Bewegungsfreiheit des Massenpunktes einschränkte. Ein ganz entsprechendes Prinzip hatte schon *Heinrich Hertz* in seiner Mechanik zum Grundprinzip für alle Bewegungen erhoben.

Anmerkung 21 (S. 36). S. *A. Einstein*, Ann. d. Phys. 4. Folge, Bd. *35*, S. 898.

Digitized by Google

Anmerkung 22 (S. 37). Der Ausdruck „Beschleunigungstransformation" soll besagen, daß die der Betrachtung zugrunde liegende Transformation der Veränderlichen x, y, z, t in ein System von Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 als die Beziehung zweier Bezugssysteme aufeinander aufgefaßt werden kann, die sich relativ zueinander in *beschleunigter* Bewegung befinden. Die Art des Bewegungszustandes zweier Bezugssysteme zueinander findet in der analytischen Gestalt der Transformationsgleichungen ihrer Koordinaten ihren Ausdruck.

Anmerkung 23 (S. 40). Im folgenden sollen 1. die Grundgleichungen der neuen Theorie explicite hingeschrieben und 2. der Übergang zu den *Newton*schen Grundgleichungen der Mechanik vollzogen werden.

Aus der Variationsgleichung $\delta \int ds = 0$, wo $ds^2 = \sum_1^4 g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ ist, gehen durch Ausführung der Variation die vier totalen Differentialgleichungen hervor:

$$(1) \qquad \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = \sum_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4).$$

Das sind die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes im Gravitationsfelde der $g_{\mu\nu}$.

Hierin bedeutet das Symbol $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ den Ausdruck

$$-\frac{1}{2} \sum_\alpha g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\delta g_{\mu\alpha}}{\delta x_\nu} + \frac{\delta g_{\nu\alpha}}{\delta x_\mu} - \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x_\alpha} \right).$$

Das Symbol $g^{\sigma\alpha}$ bedeutet die Unterdeterminante zu $g_{\sigma\alpha}$ aus der Determinante $\begin{Vmatrix} g_{11} \cdots g_{14} \\ g_{41} \cdots g_{44} \end{Vmatrix}$, dividiert durch diese Determinante.

Die 10 Differentialgleichungen für die „Gravitationspotentiale" $g_{\mu\nu}$ lauten:

$$(2) \qquad \sum_\alpha \frac{d\, \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{dx_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = \varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Die Größen $T_{\mu\nu}$ und T sind Ausdrücke, die mit den Komponenten des Spannungs-Energie-Tensors (der in der neuen Theorie an die Stelle der Massendichte als felderregende Größe tritt), in einfacher Beziehung stehen. $\varkappa$ ist im wesentlichen gleich der Gravitationskonstante der *Newton*schen Theorie.

Digitized by Google

Die Differentialgleichungen (1) *und* (2) *sind die Grundgleichungen der neuen Theorie.* Eine ausführliche Ableitung derselben findet man in der Broschüre von A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." J. A. Barth, Leipzig 1916.

2. Um von diesen Gleichungen aus den Anschluß an die *Newton*sche Theorie zu gewinnen, muß man verschiedene vereinfachende Voraussetzungen machen. Wir wollen erstens voraussetzen, daß die $g_{\mu\nu}$ nur um Größen, die klein gegen 1 sind, von den Werten abweichen, die durch das Schema:

$$\begin{Bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Bmatrix}$$

gegeben sind. Diese Werte für die $g_{\mu\nu}$ charakterisieren den Fall der speziellen Relativitätstheorie, also den Fall des gravitationsfreien Zustandes. Auch wollen wir annehmen, daß im Unendlichfernen die $g_{\mu\nu}$ in die obigen Werte übergehen; d. h. daß die Materie sich nicht bis ins Unendliche ausdehnt.

Zweitens wollen wir annehmen, daß die Geschwindigkeiten der Materie klein gegen die Lichtgeschwindigkeit seien und als unendlich kleine Größen erster Ordnung aufgefaßt werden können. Dann sind die Größen

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}s}$$

unendlich klein erster Ordnung und $\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}s}$ bis auf Größen zweiter Ordnung gleich 1. Aus der Definitionsgleichung des $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ erkennt man dann, daß diese Größen unendlich klein erster Ordnung sind. Wenn man Größen zweiter Ordnung vernachlässigt und schließlich annimmt, daß bei den kleinen Geschwindigkeiten der Materie die Änderungen des Gravitationsfeldes nach der Zeit klein sind, d. h. daß die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ nach der Zeit neben denjenigen nach den räumlichen Koordinaten vernachlässigt werden können, so nimmt das Gleichungssystem (1) die Gestalt an:

$$(1\,a) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x_\tau}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g_{44}}{\delta x_\tau} (\tau = 1, 2, 3).$$

Dies wäre schon die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes nach der *Newton*schen Mechanik, wenn $\frac{1}{2} g_{44}$ das gewöhnliche Gravitationspotential darstellte. Wir müssen also noch sehen, was unter den hier gewählten vereinfachenden Voraussetzungen aus der Differentialgleichung für g_{44} in der neuen Theorie wird.

Der felderregende Spannungs-Energie-Tensor schrumpft bei unseren ganz speziellen Annahmen auf die Massendichte ϱ zusammen:

$$T = T_{44} = \varrho.$$

In den Differentialgleichungen (2) ist das zweite Glied auf der linken Seite das Produkt zweier Größen, die nach den obigen Überlegungen als unendlich klein erster Ordnung zu betrachten sind. Das zweite Glied können wir also, als unendlich klein zweiter Ordnung, außer acht lassen. Das erste Glied dagegen liefert, wenn man, wie oben, die nach der Zeit differenzierten Glieder wegläßt, also das Gravitationsfeld als „stationär" auffaßt, für $\mu = \nu = 4$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 g_{44}}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 g_{44}}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 g_{44}}{\delta x_3^2}\right) = -\frac{1}{2} \Delta g_{44}.$$

Also degeneriert die Differentialgleichung für g_{44} in die *Poisson*sche Gleichung:

(2a) $$\Delta g_{44} = \varkappa \cdot \varrho.$$

In erster Näherung, d. h. also wenn man die Lichtgeschwindigkeit als die unendlich große Geschwindigkeit auffaßt, was ja, wie im Abschnitt 3b ausführlich erläutert wurde, ein charakteristisches Merkmal der klassischen Theorie ist, und wenn man gewisse einfache Annahmen über das Verhalten der $g_{\mu\nu}$ im Unendlichfernen macht und die zeitlichen Änderungen des Gravitationsfeldes vernachlässigt, werden aus den, auf Grund ganz allgemeiner Ansätze gewonnen, Differentialgleichungen der *Einstein*schen Theorie die bekannten Gleichungen der *Newton*schen Mechanik.

Anmerkung 24 (S. 42). Die Flächentheorie, d. h. das Studium der Geometrie auf einer Fläche, führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die für irgendeine Fläche gewonnenen Sätze auch für jede andere Fläche gelten, die

Digitized by Google

man aus der ersten durch Verbiegung *ohne Zerrung* erzeugen kann. Kann man nämlich zwei Flächen Punkt für Punkt so aufeinander beziehen, daß *in entsprechenden Punkten* die Linienelemente gleich sind, so sind auch entsprechende endliche Bögen, Winkel, Figureninhalte usw. gleich. Man gelangt also auf beiden Flächen zu den nämlichen planimetrischen Sätzen. Man nennt solche Flächen aufeinander *abwickelbar*. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit ist, daß der Ausdruck für das Linienelement der einen Fläche

$$\mathrm{d}\,s^2 = g_{11}\,\mathrm{d}\,x_1^2 + g_{12}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2 + g_{22}\,\mathrm{d}\,x_2^2$$

in denjenigen der anderen

$$\mathrm{d}\,s'^2 = g'_{11}\,\mathrm{d}\,x'_1{}^2 + g'_{12}\,\mathrm{d}\,x_1'\,\mathrm{d}\,x_2' + g'_{22}\,\mathrm{d}\,x_2'^2$$

transformiert werden kann. Nach einem Satze von *Gauß* ist dazu *notwendig*, daß beide Flächen gleiches *Krümmungsmaß* haben. Ist es zugleich längs der ganzen Fläche konstant, wie z. B. auf einem Zylindermantel oder auf einer Ebene, so ist allen Anforderungen für die Abwickelbarkeit der Flächen genügt. Andernfalls liefern besondere Gleichungen darüber Aufschluß, ob die Flächen oder Stücke derselben aufeinander abgewickelt werden können. Die zahlreichen Teilaufgaben, die sich bei diesen Fragen ergeben, sind in jedem Buche über *Differentialgeometrie* (*Bianchi-Lukat*) eingehend besprochen. Diese Disziplin, die bisher nur mathematisches Interesse beanspruchte, gewinnt nun auch weitgehende Bedeutung für die Naturwissenschaften.

Anmerkung 25 (S. 48). Man darf sich auch nicht der Täuschung hingeben, das *Newton*sche Grundgesetz der Gravitation irgendwie als eine *Erklärung* der Gravitation aufzufassen. Der Begriff der Anziehungskraft ist unserem Muskelgefühl entlehnt und hat darum, auf leblose Materie übertragen, keinen Sinn. *C. Neumann*, der viel Mühe darauf verwandt hat, die *Newton*sche Mechanik auf eine solide Basis zu stellen, hat selbst diesen Punkt in drastischer Weise zu Beginn seiner, im früheren oft angeführten Schrift durch eine Erzählung glossiert, die die Schwächen der bisherigen Auffassung kraß beleuchtet.

„Nehmen wir an, ein Nordpolfahrer erzählte uns von jenem rätselhaften Meer. Es wäre ihm geglückt, in dasselbe einzu-

dringen und es habe sich ihm dort ein merkwürdiges Schauspiel dargeboten. Mitten im Meere habe er zwei schwimmende Eisberge erblickt, ziemlich weit voneinander entfernt, einen größeren und einen kleineren. Aus dem Inneren des großen Berges sei eine Stimme ertönt, welche in befehlendem Tone gerufen habe: „Zehn Fuß näher!" und sofort habe der kleine Eisberg dem Befehle Folge geleistet und sei zehn Fuß näher an den großen herangerückt. Und wiederum habe der größere kommandiert: „Sechs Fuß näher!" Sofort habe der andere den Befehl wieder ausgeführt. Und so wäre Befehl auf Befehl erschallt und der kleine Eisberg in fortwährender Bewegung gewesen, eifrig bemüht, jeden Befehl augenblicklich auf das genaueste auszuführen.

Sicherlich würden wir einen solchen Bericht in das Reich der Fabel verweisen. Doch spotten wir nicht zu früh! Die Vorstellungen, die uns hier sonderbar erscheinen, es sind dieselben, welche dem vollendetsten Teil der Naturwissenschaften zugrunde liegen, es sind dieselben, denen der berühmteste unter den Naturforschern den Ruhm seines Namens verdankt.

Denn im Weltraum erschallen fortwährend solche Befehle, ausgehend von den einzelnen Himmelskörpern von Sonne, Planeten, Monden und Kometen. Jeder einzelne Weltkörper lauscht auf die Befehle, welche die übrigen Körper ihm zurufen, fortwährend bemüht, diese Befehle aufs pünktlichste auszuführen. In geradliniger Bahn würde unsere Erde durch den Weltraum dahinstürzen, wenn sie nicht gelenkt und geleitet würde durch den von Augenblick zu Augenblick von der Sonne her ertönenden Kommandoruf, dem die Befehle der übrigen Weltkörper weniger vernehmlich sich beimischen.

Allerdings werden diese Befehle ebenso *schweigend* gegeben, wie sie schweigend vollzogen werden. Auch hat *Newton* dieses wechselseitige Spiel von Befehl und Folgeleistung mit einem anderen Namen bezeichnet. Er spricht kurzweg von der gegenseitigen Anziehungskraft, welche zwischen den Weltkörpern stattfindet. Die Sache aber ist dieselbe. Denn diese gegenseitige Einwirkung besteht darin, daß der eine Körper Befehle erteilt, und der andere dieselben befolgt."

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Digitized by Google

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Raum und Zeit
in der gegenwärtigen Physik
Von **Moritz Schlick**
Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie
1917. Preis M. 2.40

Die radioaktive Strahlung
als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen
Von Dr. **L. v. Bortkiewicz**
a. o. Professor an der Universität Berlin
1913. Preis M. 4.—

Die Iterationen
Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie
Von Dr. **L. v. Bortkiewicz**
a. o. Professor an der Universität Berlin
1917. Preis M. 10.—

Zur Krise der Lichtäther-Hypothese
Rede, gehalten beim Antritt des Lehramts an der Reichs-Universität zu Leiden
Von Professor Dr. **P. Ehrenfest**
1913. Preis M. —.60

Die Atomionen chemischer Elemente
und ihre Kanalstrahlen-Spektra
Von Dr. **J. Stark**
Professor der Physik an der Technischen Hochschule Aachen
Mit 11 Figuren im Text und auf einer Tafel
1913. Preis M. 1.60

Mondphasen, Osterrechnung und ewiger Kalender
Von Professor Dr. **Walther Jacobsthal**
z. Zt. Hauptmann und Kompagnieführer im Felde
1917. Preis M. 2.—

Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems
Aufstellung einer neuen Theorie nach vorhergehender Kritik der Theorien von **Kant, Laplace, Poincaré, Moulton, Arrhenius u. a.**
Von Dr. **Friedrich Nölke**
Mit 3 Textfiguren. 1908. Preis M. 6.—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Sammlung von Monographien und Lehrbüchern aus dem Gesamtgebiet der Naturwissenschaften

Herausgegeben von
der Redaktion der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften"

Demnächst erscheint:

Band I:

Allgemeine Erkenntnislehre

Von Privatdozent Dr. **M. Schlick**

Preis etwa M. 10.—

Die Naturwissenschaften

Wochenschrift für die Fortschritte der Naturwissenschaft, der Medizin und der Technik

Ab Januar 1914 herausgegeben von

Dr. A. Berliner Berlin und **Prof. Dr. A. Pütter** Bonn

bringt regelmäßig a) Originalbeiträge und Sammelreferate, — b) Besprechungen von Büchern und Zeitschriftenartikeln, die mehr als ein spezialwissenschaftliches Interesse bieten, — c) Referate über wissenschaftliche Veranstaltungen (Kongresse, Vorträge, Ausstellungen), — d) Berichte über den Forschungsbetrieb auf Universitäten, Akademien, wissenschaftlichen Stationen und Instituten, — e) Berichte über Fragen der Methodik und des Unterrichts, — f) Kleine wissenschaftliche Mitteilungen, — g) Wissenschaftliche Korrespondenz.

52 Hefte im Jahr — Preis für das Vierteljahr Mk. 6.—

Abonnements nehmen alle Buchhandlungen, Postanstalten und der unterzeichnete Verlag entgegen

Probehefte jederzeit unentgeltlich vom

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9, Link-Str. 23-24

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google

Digitized by Google

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Raum und Zeit
in der gegenwärtigen Physik
Von **Moritz Schlick**
Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie
1917. Preis M. 2.40

Die radioaktive Strahlung
gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen
Von Dr. **L. v. Bortkiewicz**
a. o. Professor an der Universität Berlin
1913. Preis M. 4.—

Die Iterationen
Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie
Von Dr. **L. v. Bortkiewicz**
a. o. Professor an der Universität Berlin
1917. Preis M. 10.—

ır Krise der Lichtäther-Hypothese
Rede, gehalten beim Antritt des Lehramts an der Reichs-Universität zu Leiden
Von Professor Dr. **P. Ehrenfest**
1913. Preis M. —.60

Atomionen chemischer Elemente
und ihre Kanalstrahlen-Spektra
Von Dr. **J. Stark**
Professor der Physik an der Technischen Hochschule Aachen
Mit 11 Figuren im Text und auf einer Tafel
1913. Preis M. 1.60

phasen, Osterrechnung und ewiger Kalender
Von Professor Dr. **Walther Jacobsthal**
z. Zt. Hauptmann und Kompagnieführer im Felde
1917. Preis M. 2.—

Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems
lung einer neuen Theorie nach vorhergehender Kritik der n von **Kant, Laplace, Poincaré, Moulton, Arrhenius u. a.**
Von Dr. **Friedrich Nölke**
Mit 3 Textfiguren. 1908. Preis M. 6.—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Digitized by Google